Corrigé 11

1. Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes, en précisant leur ensemble de définition et celui de la fonction dérivée.

a) $a(x) = x^6 + 15\sqrt[5]{x^2} - \dfrac{6}{x}$

b) $b(x) = \dfrac{4x-1}{2x+1}$

c) $c(x) = \sqrt{\dfrac{1-2x}{x+1}}$

d) $d(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

e) $e(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x^3}\right)^2}$

g) $g(x) = (x-1)^5(2x+1)^5$; pour quelles valeurs de x la dérivée $g'(x)$ est-elle nulle ?

h) $h(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+a)}$; pour quelle valeur de a la dérivée $h'(x)$ est-elle nulle en $x=-1$?

---

a) $a(x) = x^6 + 15\sqrt[5]{x^2} - \dfrac{6}{x}, \qquad D_a = \mathbb{R}^*.$

On dérive la fonction $a(x)$ terme à terme :

$$a'(x) = \left(x^6 + 15\,x^{2/5} - 6\,x^{-1}\right)' = \left(x^6\right)' + \left(15\,x^{2/5}\right)' - \left(6\,x^{-1}\right)'$$

$$a'(x) = 6\,x^5 + 15\cdot\tfrac{2}{5}\,x^{-3/5} - 6\,(-1)\,x^{-2} = 6\left(x^5 + \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} + \frac{1}{x^2}\right), \quad D_{a'} = \mathbb{R}^*.$$

b) $b(x) = \dfrac{4x-1}{2x+1}, \qquad D_b = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}.$

- Une méthode

  On dérive la fonction $b(x)$ comme un quotient :

$$b'(x) = \frac{4\cdot(2x+1)-(4x-1)\cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{6}{(2x+1)^2}, \qquad D_{b'} = \mathbb{R}\setminus\{-\tfrac{1}{2}\}.$$

- Une autre méthode

  En effectuant la division euclidienne de $4x-1$ par $2x+1$, on obtient

$$b(x) = \frac{4x-1}{2x+1} = \frac{(4x+2)-3}{2x+1} = \frac{2\,(2x+1)-3}{2x+1} = 2 - \frac{3}{2x+1}.$$

Et on obtient $b'(x)$ en dérivant $\dfrac{1}{2x+1}$:

$$b'(x) = \left[2 - 3 \cdot \frac{1}{2x+1}\right]' = -3\left[\frac{1}{2x+1}\right]' = -3\left[\frac{-2}{(2x+1)^2}\right] = \frac{6}{(2x+1)^2}\,,$$

$$D_{b'} = D_b = \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{1}{2}\}\,.$$

c) $c(x) = \sqrt{\dfrac{1-2x}{x+1}}\,,\quad D_c = \,]-1\,;\,\tfrac{1}{2}]\,.$ On dérive $c(x)$ comme une racine :

$$c'(x) = \left[\sqrt{\frac{1-2x}{x+1}}\right]' = \frac{\left[\frac{1-2x}{x+1}\right]'}{2\sqrt{\frac{1-2x}{x+1}}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{1-2x}} \cdot \frac{-2\,(x+1) - (1-2x)}{(x+1)^2}$$

$$c'(x) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x+1)^3\,(1-2x)}}\,,\qquad D_{c'} = \,]-1\,;\,\tfrac{1}{2}\,[\,.$$

d) $d(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,,\qquad D_d = \mathbb{R}_+\,.$

On décrit $d(x)$ à l'aide d'exposants fractionnaires :

$$d(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[8]{x} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{8}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = x^{\frac{7}{8}}\,.$$

Puis on dérive l'expression obtenue :

$$d'(x) = \frac{7}{8} \cdot x^{\frac{7}{8}-1} = \frac{7}{8} \cdot x^{-\frac{1}{8}} = \frac{7}{8\sqrt[8]{x}}\,,\qquad D_{d'} = \mathbb{R}_+^*\,.$$

e) $e(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}\,,\qquad D_e = \mathbb{R}\,.$

- Une méthode

On dérive $e(x)$ comme un quotient :

$$\begin{aligned}
e'(x) &= \left[\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}\right]' \\
&= \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right) \cdot \left(\sqrt{x^2+1}-x\right) - \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)}{(\sqrt{x^2+1}-x)^2} \\
&= \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2+1}-x\right) - \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) \cdot \left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1} \cdot (\sqrt{x^2+1}-x)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[\,(x^2+1)-x^2\,]-[\,x^2-(x^2+1)\,]}{\sqrt{x^2+1}\cdot(\sqrt{x^2+1}-x)^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}\cdot(\sqrt{x^2+1}-x)^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)^2}{[\,(x^2+1)-x^2\,]^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2, \qquad D_{e'}=\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

- Une autre méthode

  On commence par simplifier l'expression de $e(x)$ en amplifiant le dénominateur par son expression conjuguée :

$$e(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2}{(x^2+1)-x^2} = \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2.$$

  Puis on dérive l'expression obtenue comme un carré :

$$e'(x) = 2\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)' = 2\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right)$$

$$e'(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2, \qquad D_{e'}=\mathbb{R}\,.$$

f) $f(x)=\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x^3}\right)^2}, \qquad D_f=\mathbb{R}_+. \qquad f(x)=\left(1-x^{3/2}\right)^{2/3}.$

$$f'(x) = \frac{2}{3}\left(1-x^{3/2}\right)^{-1/3}\left(1-x^{3/2}\right)' = \frac{2}{3}\left(1-x^{3/2}\right)^{-1/3}\left(-\frac{3}{2}\,x^{1/2}\right)$$

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1-\sqrt{x^3}}}, \qquad D_{f'}=\mathbb{R}_+-\{1\}\,.$$

g) $g(x)=(x-1)^5(2x+1)^5, \qquad D_g=\mathbb{R}\,.$

- On dérive $g(x)$ comme un produit :

$$g'(x) = \left[\,5\,(x-1)^4\,\right]\cdot(2x+1)^5+(x-1)^5\cdot\left[\,5\,(2x+1)^4\cdot 2\,\right],$$

  puis on met en évidence les facteurs communs :

$$g'(x) = 5\,(x-1)^4\,(2x+1)^4\,[\,(2x+1)+2\,(x-1)\,] = 5\,(x-1)^4\,(2x+1)^4\,(4x-1)\,.$$

$$D_{g'}=\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad g'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x\in\{-\tfrac{1}{2}\,;\tfrac{1}{4}\,;1\}\,.$$

- Ou on dérive $g(x)$ exprimé sous la forme $w^5(x)$:

  $$g'(x) = \big(\,[\,(x-1)\,(2x+1)\,]^5\,\big)' = 5\,[\,(x-1)\,(2x+1)\,]^4\,[\,(x-1)\,(2x+1)\,]',$$

  $$g'(x) = 5\,(x-1)^4\,(2x+1)^4\,\big[2x^2-x-1\big]' = 5\,(x-1)^4\,(2x+1)^4\,(4x-1)\,.$$

  $$D_{g'} = \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-\tfrac{1}{2}\,;\,\tfrac{1}{4}\,;1\}\,.$$

h) $h(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2\cdot(x+a)}\,, \qquad D_h = \mathbb{R}\,, \qquad h(x) = (x-1)^{2/3}\cdot(x+a)^{1/3}\,.$

On dérive $h(x)$ comme un produit :

$$h'(x) \;=\; \left[\frac{2}{3}\cdot(x-1)^{-1/3}\right]\cdot(x+a)^{1/3} + (x-1)^{2/3}\cdot\left[\frac{1}{3}\,(x+a)^{-2/3}\right],$$

$$h'(x) \;=\; \frac{2\,(x+a)^{1/3}}{3\,(x-1)^{1/3}} + \frac{(x-1)^{2/3}}{3\,(x+a)^{2/3}}$$

et en mettant les deux termes de cette somme au même dénominateur :

$$h'(x) = \frac{2\,(x+a)+(x-1)}{3\,\sqrt[3]{(x-1)\,(x+a)^2}} = \frac{3x+2a-1}{3\,\sqrt[3]{(x-1)\,(x+a)^2}}\,, \qquad D_{h'} = \mathbb{R}\setminus\{1\,;\,-a\}\,.$$

$$h'(-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\,(-1)+2a-1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2\,.$$

2. Déterminer l'équation de la parabole d'équation $y = x^2+px+q$ tangente à la droite d'équation $y-3x-1=0$ au point T d'abscisse $x_T = 1$.

Soit $f(x) = x^2+px+q$.

La droite t d'équation $y-3x-1=0$ est tangente à la parabole Γ d'équation $y = f(x)$ au point T d'abscisse $x_T = 1$ si et seulement si

- $T \in t \quad \Leftrightarrow \quad y_T = 4\,, \qquad T\,(1\,,\,4)\,.$
- $T \in \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad 4 = 1+p+q \quad \Leftrightarrow \quad p+q = 3\,.$
- La pente de la droite t est égale à la dérivée de f en x_T.

  $$f'(x_T) = 2\,x_T + p = 2+p\,, \qquad f'(x_T) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2+p = 3 \quad \Leftrightarrow \quad p = 1\,.$$

D'où : $\quad p = 1$ et $q = 2\,, \qquad \Gamma:\; y = x^2+x+2\,.$

3. Déterminer les points de tangence T des tangentes issues de l'origine à la courbe Γ d'équation $y = \dfrac{3x+1}{x^2-x+4}$.

Soit $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2-x+4}$. L'équation de la tangente t à Γ en x_0 s'écrit :

$$t: \quad y - f(x_0) \; = \; f'(x_0)\,(x - x_0)\,.$$

La tangente t passe par l'origine O, donc les coordonnées $(0,0)$ vérifient l'équation de t :

$$0 - f(x_0) \; = \; f'(x_0)\,(0 - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0) \; = \; x_0 \cdot f'(x_0)\,.$$

Calcul de la fonction dérivée de f :

$$f'(x) \; = \; \frac{3\,(x^2-x+4) - (3x+1)\,(2x-1)}{(x^2-x+4)^2} \; = \; \frac{-3x^2-2x+13}{(x^2-x+4)^2}\,.$$

Résolution de l'équation en x_0 :

$$f(x_0) \; = \; x_0 \cdot f'(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x_0+1}{x_0^2-x_0+4} \; = \; x_0 \cdot \frac{-3x_0^2-2x_0+13}{(x_0^2-x_0+4)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (3x_0+1)\,(x_0^2-x_0+4) \; = \; x_0 \cdot (-3x_0^2-2x_0+13) \quad \Leftrightarrow \quad 6x_0^3-2x_0+4=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_0+1)\,(\underbrace{6x_0^2-6x_0+4}_{\Delta<0})=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0=-1\,. \qquad \text{D'où : } \; T\,(-1\,;\,-\tfrac{1}{3})\,.$$

4. Soient f une fonction dérivable en $x_0 = 2$, Γ_1 la courbe d'équation $y = f(x)$ et t_1 la tangente à Γ_1 en $x_0 = 2$.

$$t_1: \; 3x - 2y - 4 = 0\,.$$

Soient g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, Γ_2 la courbe d'équation $y = g \circ f(x)$ et t_2 la tangente à Γ_2 en $x_0 = 2$.

Déterminer l'équation cartésienne de t_2.

L'équation cartésienne de t_2 s'écrit

$$y - g \circ f(x_0) = (g \circ f)'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

- Calcul de $g \circ f(x_0)$:
  - $(x_0\,,\, f(x_0))$ est le point de contact entre Γ_1 et t_1, on détermine donc $f(x_0)$ comme l'ordonnée du point de t_1 d'abscisse x_0.

$$(x_0\,,\, f(x_0)) \in t_1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x_0 - 2\, f(x_0) - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0) = 1\,.$$

  - On en déduit $g \circ f(x_0)$: $g \circ f(x_0) = g\,[f(x_0)] = \left.\dfrac{1}{x^2+1}\right|_{x=1} = \dfrac{1}{2}$.

- Calcul de $(g \circ f)'(x_0) = g'\,[f(x_0)] \cdot f'(x_0)$:
  - $f'(x_0)$ est la pente de t_1 : $y = \dfrac{3}{2}\,x - 2$, d'où $f'(x_0) = \dfrac{3}{2}$.
  - $g'\,[f(x_0)] = \left[\dfrac{1}{x^2+1}\right]'_{x=1} = -\left.\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\right|_{x=1} = -\dfrac{1}{2}$
  - On en déduit $(g \circ f)'(x_0)$: $\quad (g \circ f)'(x_0) = g'\,[f(x_0)] \cdot f'(x_0) = -\dfrac{3}{4}$.

- L'équation cartésienne de t_2 s'écrit donc

$$y - g \circ f(x_0) = (g \circ f)'(x_0)\,(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}\,(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x + 4y - 8 = 0\,.$$

5. On donne deux arcs de parabole Γ_1 et Γ_2 définis par

$$\Gamma_1 : \quad f_1(x) \;=\; -2x^2 + 6 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_2 : \quad f_2(x) \;=\; -(x-1)^2\,.$$

Déterminer l'équation cartésienne de la tangente t commune aux courbes Γ_1 et Γ_2, de pente négative.

Soit m_1 la pente de la tangente à Γ_1 en $T_1\,(x_1\,,\, y_1)$:

$$m_1 \;=\; f_1'(x_1) \;=\; -4\,x_1\,.$$

Soit m_2 la pente de la tangente à Γ_2 en $T_2\,(x_2\,,\, y_2)$:

$$m_2 \;=\; f_2'(x_2) \;=\; -2\,(x_2 - 1)\,.$$

La tangente à Γ_1 en T_1 coïncide avec la tangente à Γ_2 en T_2 donc les pentes m_1 et m_2 sont égales.

$$m_1 \;=\; m_2 \quad \Leftrightarrow \quad -4\,x_1 \;=\; -2\,(x_2 - 1) \quad \Leftrightarrow \quad x_2 \;=\; 2\,x_1 + 1\,.$$

La tangente t commune aux deux paraboles Γ_1 et Γ_2 passe par T_1 et T_2 et a pour pente $m = m_1 = m_2$:

$$y_1 - y_2 \;=\; m\,(\,x_1 - x_2\,) \quad \text{avec} \quad y_1 = f_1(x_1)\,,\quad y_2 = f_2(x_2) \quad \text{et} \quad x_2 = 2\,x_1 + 1\,.$$

On exprime cette relation en fonction de x_1 (ou de x_2) uniquement :

$$f_1(x_1) - f_2(2\,x_1+1) \;=\; -4\,x_1\,[\,x_1 - (2\,x_1+1)\,]$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(-2\,x_1^2+6\right) - \left[-(2\,x_1)^2\right] \;=\; -4\,x_1\,[-x_1-1] \quad \Leftrightarrow \quad 2\,x_1^2+4\,x_1-6 \;=\; 0$$

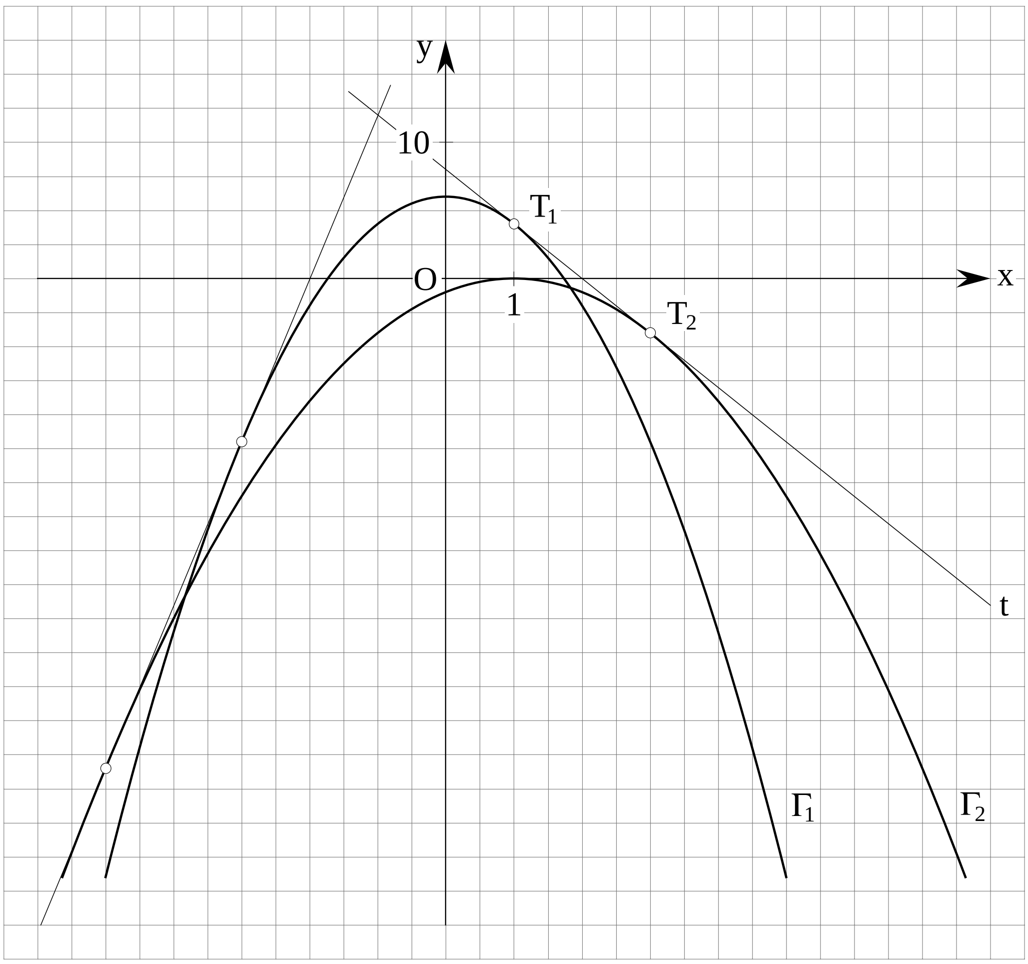
$$\Leftrightarrow \quad x_1^2+2\,x_1-3 \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1+3)\,(x_1-1) \;=\; 0\,.$$

La pente de la tangente commune est négative : $-4\,x_1 \;<\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \;>\; 0\,.$
On retient donc la solution $x_1 = 1\,.$

$$x_1 = 1\,, \quad x_2 = 3\,, \quad T_1\,(1\,,\,4)\,, \quad T_2\,(3\,,\,-4) \quad \text{et} \quad m = -4\,.$$

L'équation de la tangente t commune aux deux arcs de courbes Γ_1 et Γ_2, de pente négative, s'écrit donc :

$$t: \quad y-4 \;=\; -4\,(x-1) \qquad \Leftrightarrow \qquad 4x+y-8 \;=\; 0\,.$$



6. Montrer que les graphes des deux fonctions f et g admettent un unique point d'intersection,

$$f(x) = \frac{2x-1}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x^2-3x+4}{x^2-2x+3}\,,$$

puis calculer l'angle φ entre les deux courbes en ce point.

- Recherche du point d'intersection

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-1}{x} - \frac{x^2-3x+4}{x^2-2x+3} = 0$$

$$\frac{(2x-1)\,(x^2-2x+3) - x\,(x^2-3x+4)}{x\,(x^2-2x+3)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^3-2x^2+4x-3}{x\,(x^2-2x+3)} = 0$$

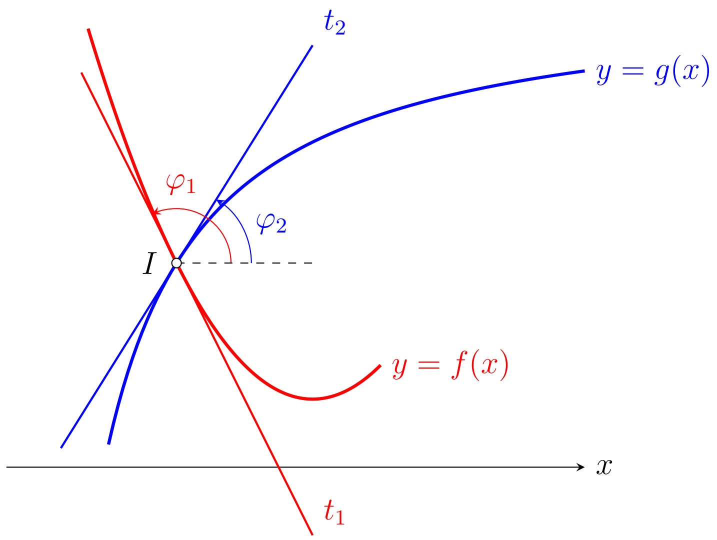
$x=1$ est un zéro du numérateur : $x^3-2x^2+4x-3 = (x-1)\,\underbrace{(x^2-x+3)}_{\Delta<0}$.

L'unique point d'intersection se trouve en $x=1$: $I\,(1;1)$.

- Angle entre les deux courbes

Au point d'intersection $I\,(1;1)$, l'angle entre ces deux courbes est l'angle défini par leur tangente en ce point.

Figure d'étude :



$*$ Pente m_1 de la tangente t_1 à $y = f(x)$ au point I :

$$m_1 = f'(1) = \left[\frac{2x-1}{x}\right]'_{x=1} = \left[2 - \frac{1}{x}\right]'_{x=1} = \left[\frac{1}{x^2}\right]'_{x=1} = 1\,.$$

$*$ Pente m_2 de la tangente t_2 à $y = g(x)$ au point I :

$$m_2 = g'(1) = \left[\frac{x^2-3x+4}{x^2-2x+3}\right]'_{x=1} = \left[1 + \frac{-x+1}{x^2-2x+3}\right]'_{x=1}$$

$$= \left[\frac{-(x^2-2x+3) - (-x+1)\,(2x-2)}{(x^2-2x+3)^2}\right]'_{x=1} = -\frac{1}{2}\,.$$

$*$ Calcul de l'angle φ :

On détermine $\varphi \in [\,0\,;\,\frac{\pi}{2}\,[$ à partir de $m_1 = \tan\varphi_1$ et de $m_2 = \tan\varphi_2$.

$$\tan\varphi \;=\; \tan|\varphi_1-\varphi_2| \;=\; \left|\tan(\varphi_1-\varphi_2)\right| \;=\; \left|\frac{\tan\varphi_1-\tan\varphi_2}{1+\tan\varphi_1\cdot\tan\varphi_2}\right|$$

$$=\;\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1\cdot m_2}\right| \;=\; \left|\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}\right| \;=\; 3\,,$$

$$\varphi = \arctan(3)\,.$$

7. Soit $\widehat{b}$ la fonction définie dans l'exercice 7 de la série 10 (prolongée par continuité de la fonction b donnée dans l'exercice 4 b) de la série 9) :

$$\widehat{b}(x) \;=\; \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{x} \quad \text{si} \quad x\neq 0 \qquad \text{et} \qquad \widehat{b}(0)=1\,.$$

La fonction $\widehat{b}$ est-elle continûment dérivable en $x_0=0$?

Dans l'exercice 7 de la série 10, nous avons montré que la fonction $\widehat{b}$ est dérivable en $x_0=0$. Le nombre dérivée $\widehat{b}\,'(0)$ est défini par

$$\widehat{b}\,'(0) \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{\widehat{b}(h)-\widehat{b}(0)}{h} \;=\; \frac{1}{2}\,.$$

La fonction $\widehat{b}$ est continûment dérivable en $x_0=0$ si et seulement si la fonction $\widehat{b}\,'$ est continue en $x_0=0$, c'est-à-dire si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0}\widehat{b}\,'(x)=\widehat{b}\,'(0)$.

- Expression de la fonction dérivée $\widehat{b}\,'(x)$ pour $x\neq 0$.

$$\widehat{b}\,'(x) \;=\; \left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{x}\right)' \;=\; \frac{\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1\right)x \;-\; \left(\sqrt{x^2+1}+x-1\right)1}{x^2}$$

$$=\;\frac{(x+\sqrt{x^2+1})\,x-(x^2+1)-x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}{x^2\sqrt{x^2+1}} \;=\; \frac{-1+\sqrt{x^2+1}}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,.$$

- Calcul de la limite de $\widehat{b}\,'(x)$ lorsque x tend vers 0.

$$\lim_{x\to 0}\widehat{b}\,'(x) \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{-1+\sqrt{x^2+1}}{x^2\sqrt{x^2+1}} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{\left(-1+\sqrt{x^2+1}\right)\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}{x^2\sqrt{x^2+1}\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$=\;\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2+1}\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)} \;=\; \frac{1}{2}\,.$$

- Conclusion.

$\lim\limits_{x\to 0}\widehat{b}\,'(x) \;=\; \dfrac{1}{2} \;=\; \widehat{b}\,'(0)$ donc la fonction $\widehat{b}\,'$ est continue en $x_0=0$.

8. Calculer la dérivée d'ordre n, $n \in \mathbb{N}^*$, des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^{-3}$ b) $g(x) = \sin(ax)\,,\quad a \in \mathbb{R}^*\,.$

---

a) $f(x) = x^{-3}\,,\qquad f'(x) = -3\,x^{-4}\,,\qquad f''(x) = (-3)\,(-4)\,x^{-5}\,,$

$$f^{(3)}(x) = (-3)\,(-4)\,(-5)\,x^{-6}\,,\ \cdots\ ,\ f^{(n)}(x) = (-1)^n\,\frac{(n+2)!}{2!}\,x^{-(n+3)}\,.$$

On démontre ce résultat par récurrence.

- Vérification pour $n = 1$.

$$f^{(n)}(x)\Big|_{n=1} = (-1)^n\,\frac{(n+2)!}{2!}\,x^{-(n+3)}\Bigg|_{n=1} = -3\,x^{-4} = f'(x)\,.$$

- Démonstration du pas de récurrence.

  ◦ Hypothèse : $f^{(n)}(x) = (-1)^n\,\dfrac{(n+2)!}{2!}\,x^{-(n+3)}$ pour un n donné.

  ◦ Conclusion : $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}\,\dfrac{(n+3)!}{2!}\,x^{-(n+4)}\,.$

  ◦ Preuve : $f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]' = \left[(-1)^n\,\dfrac{(n+2)!}{2!}\,x^{-(n+3)}\right]'$

$$= (-1)^n\,\frac{(n+2)!}{2!}\,\left[-(n+3)\right]x^{-(n+3)-1} = (-1)^{n+1}\,\frac{(n+3)!}{2!}\,x^{-(n+4)}\,.$$

b) $g(x) = \sin(ax)\,,\qquad g'(x) = a\,\cos(ax)\,,\qquad g''(x) = -a^2\,\sin(ax)\,,$

$$g^{(3)}(x) = -a^3\,\cos(ax)\,,\quad g^{(4)}(x) = a^4\,\sin(ax)\,,\ \cdots$$

$$\cdots\ ,\ g^{(n)}(x) = a^n\,\sin(ax + n\,\tfrac{\pi}{2})\,.$$

On démontre ce résultat par récurrence.

- Vérification pour $n = 1$.

$$g^{(n)}(x)\Big|_{n=1} = a^n\,\sin(ax + n\,\tfrac{\pi}{2})\Big|_{n=1} = a\,\cos(ax) = g'(x)\,.$$

- Démonstration du pas de récurrence.

  ◦ Hypothèse : $g^{(n)}(x) = a^n\,\sin(ax + n\,\frac{\pi}{2})$ pour un n donné.

  ◦ Conclusion : $g^{(n+1)}(x) = a^{n+1}\,\sin\left[ax + (n+1)\,\frac{\pi}{2}\right]\,.$

  ◦ Preuve : $g^{(n+1)}(x) = \left[g^{(n)}(x)\right]' = \left[a^n\,\sin(ax + n\,\frac{\pi}{2})\right]'$

$$= a^n\,\left[\sin(ax + n\,\tfrac{\pi}{2})\right]' = a^n\,\left[a\,\cos(ax + n\,\tfrac{\pi}{2})\right]$$

$$= a^{n+1}\,\sin\left[(ax + n\,\tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{\pi}{2}\right] = a^{n+1}\,\sin\left[ax + (n+1)\,\tfrac{\pi}{2}\right]\,.$$

9. Parmi les énoncés suivants, déterminer s'ils sont vrais ou faux. S'ils sont vrais, justifier. S'ils sont faux, donner un contre-exemple.

a) Soient f, g deux fonctions réelles telles que $h = g \circ f$ soit continue en $x_0 \in \mathbb{R}$. Si g est continue sur $\mathbb{R}$, alors f est continue en x_0.

b) Si f est dérivable en $x = 0$, alors $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3h) - f(h)}{h} = 2\,f'(0)$.

c) Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Si $f'(0) = 0$, alors $(f \circ g)'(0) = 0$.

d) Si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, alors f' est continue sur I.

---

a) Faux. En effet, soit g la fonction constante nulle et f donnée par $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Alors $h = g \circ f = 0$ est continue en $x_0 = 0$ mais f ne l'est pas.

b) Vrai. En effet, on calcule :

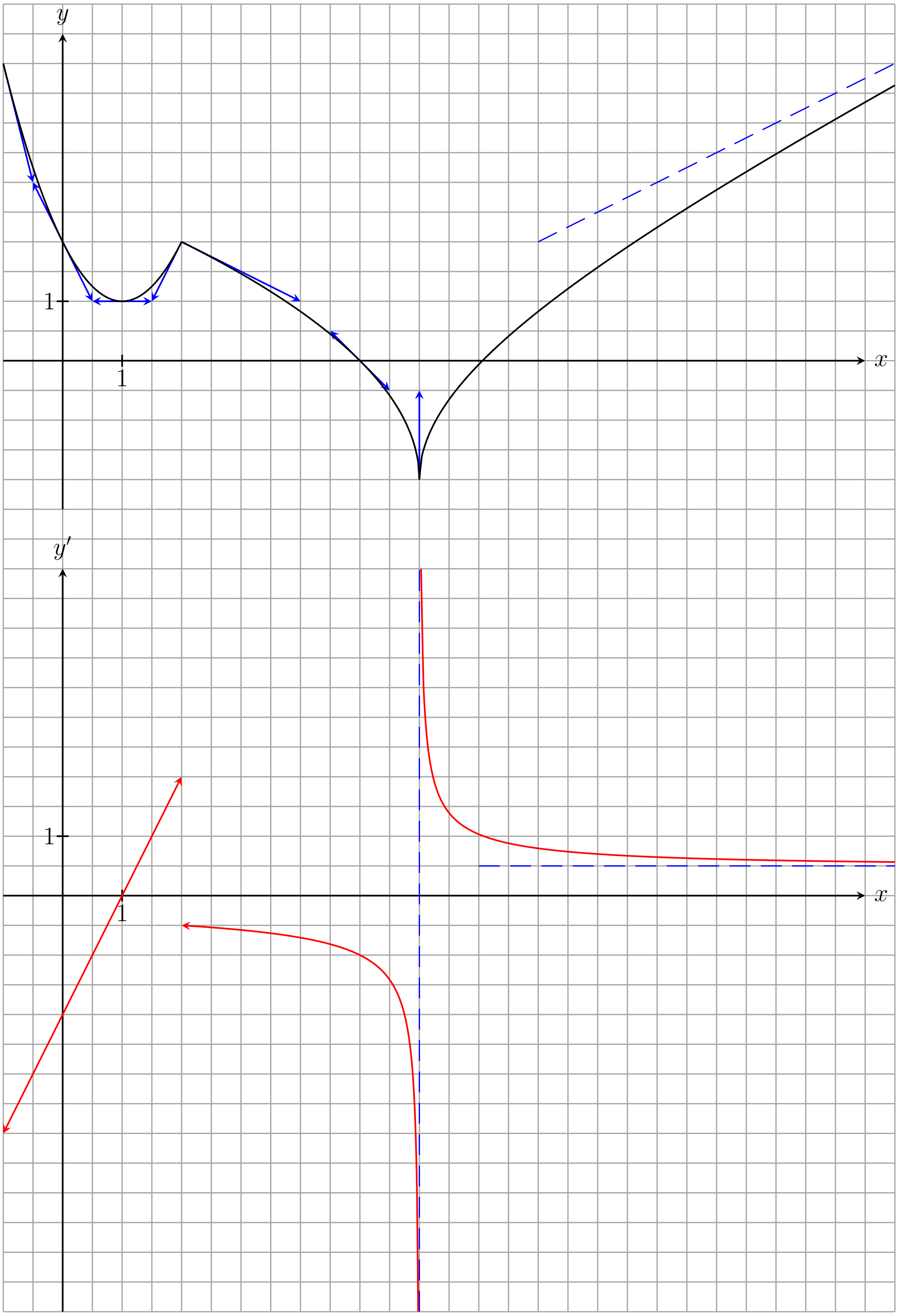
$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{f(3h) - f(h)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(3h) - f(0) + f(0) - f(h)}{h} \\ &= 3 \lim_{h \to 0} \frac{f(3h) - f(0)}{3h} - \lim_{h \to} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 2\,f'(0).\end{aligned}$$

c) Faux. En effet, la formule de dérivation est $(f \circ g)'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0)$ et non pas $f'(0) \cdot g'(0)$. Par exemple, on peut choisir $f(x) = x^3$ et $g(x) = x + 1$. On a bien $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$ mais $(f \circ g)'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0) = 3 \cdot 1^2 \cdot 1 = 3 \neq 0$.

d) Faux. Prendre par exemple $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $f(0) = 0$ et $I = \mathbb{R}$. Alors $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f'(0) = 0$. Mais f' n'est pas continue en $x = 0$.

10. On donne ci-dessous la courbe Γ d'équation $y = f(x)$.

Esquisser le graphe de la fonction dérivée de f.



11. On donne ci-dessous la courbe Γ d'équation $y = f(x)$.

Esquisser le graphe de la fonction dérivée de f.