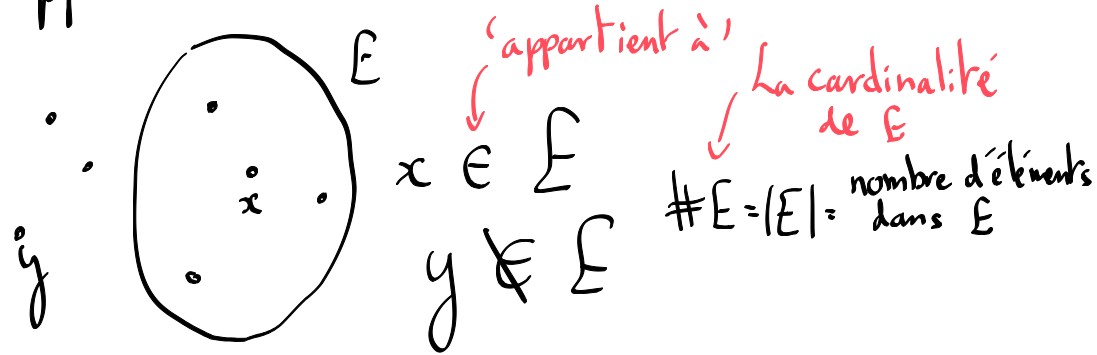


Annexe : Les ensembles

Introduction

Un ensemble est une collection d'objets mathématiques. Un élément est un objet appartenant à un ensemble.



2 manières pour construire les ensembles :

Par énumération :

$\emptyset = \{\}$ 'l'ensemble vide'

$S = \{1; 3\}$ 'solutions à $x^2 + 4x + 3 = 0$ '

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$ 'nombres naturels'

$\{\dots -2, -1; 0; 1; 2; \dots\}$ 'nombres relatifs'

Par condition d'appartenance :

$$\{0; 1; 2; 3\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$$

↑ 'tel que'

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

↑ on exclut le 0

$$\mathbb{R} = \{???\}$$

↑ pas facile...

3 règles pour les ensembles :

- L'ordre des éléments n'importe pas :

$$\{1; 2; 3\} = \{2; 1; 3\}$$

- Pas de répétition :

$$\{1; 1; 2\} \text{ x interdit}$$

- Pas de 'auto appartenance'

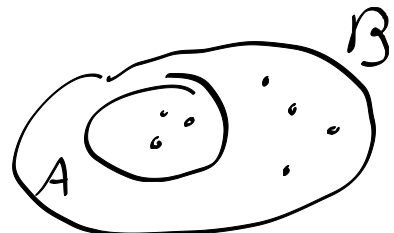
$$X = \{1; 2; X; 3\} \text{ x interdit}$$

$$X = \{E \mid E \notin E\} \text{ x interdit}$$

On écrit $A \subset B$ si

$$a \in A \Rightarrow a \in B;$$

Rem. $A \subset B \Rightarrow \#A \leq \#B$;



Quantificateurs logiques

Nous considérons 2 quantificateurs logiques:

- $\exists$: il existe
- $\forall$: pour tout

Avec ces quantificateurs nous pouvons former des propositions:

- $\exists y \in \mathbb{R}, y^2 = 2$ (vrai)
- $\exists y \in \mathbb{R}, y^2 = -2$ (faux)
- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{N}, x \leq y$ (vrai)

On utilise aussi ces quantificateurs pour construire des ensembles:

$$\mathbb{P} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z}, x = 2y \}$$

↑ l'ensemble des nombres pairs

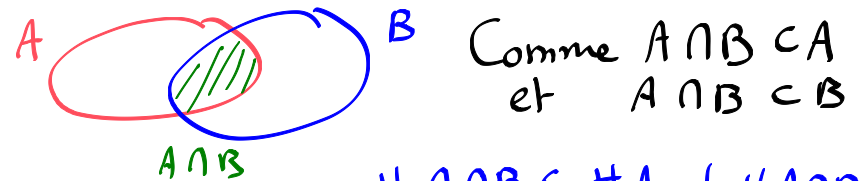
$$\mathbb{I} = \{ x \in \mathbb{R} \mid \forall a, b \in \mathbb{Z}, \frac{a}{b} \neq x \}$$

↑ l'ensemble des nombres irrationnels

Operations sur les ensembles

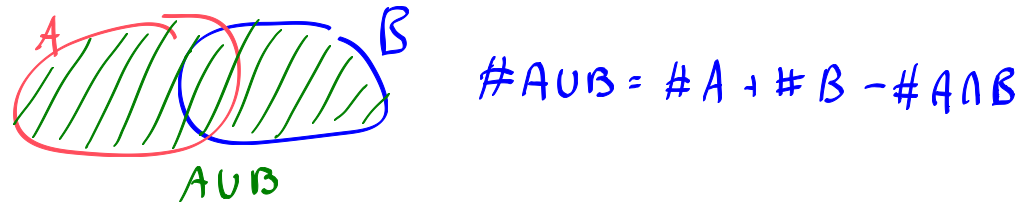
On considère 3 operations:

L'intersection $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ et } x \in B \}$

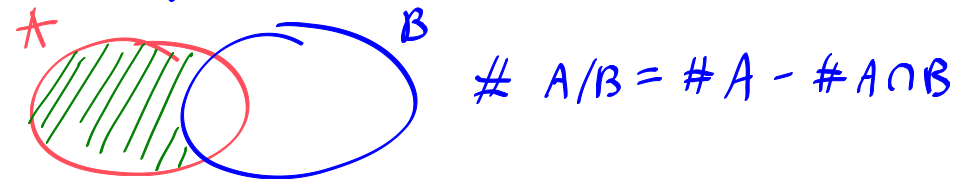


$$\# A \cap B \leq \# A \text{ et } \# A \cap B \leq \# B$$

L'Union $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \}$



La différence $A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ et } x \notin B \}$



Exemple $A = \{ 1; 2; 4 \}$
 $B = \{ 2; 3; 4 \}$

$$A \cup B = \{ 1; 2; 3; 4 \}$$

$$A \cap B = \{ 2; 4 \}$$

$$A \setminus B = \{ 1 \}$$

Intervalles Réels

Des intervalles sont des ensembles :

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \text{ 'fermé'}$$

$$]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \text{ 'ouvert'}$$

$$]a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \text{ 'semi-ouvert'}$$

Pourquoi ouvert et fermé ?

Réponse partielle : Quel est l'élément maximum dans $[1; 2]$? $\mathbb{R} : 2$ et dans $]1; 2[$?

il n'existe pas d'élément maximum !

Comme on a vu, l'ensemble de solutions à une inégalité est souvent une intervalle ou l'union de plusieurs intervalles.