

ANALYSE I

CMS

L'Analyse est l'étude et la comparaison de grandeurs numériques. Pour ce faire, on va développer des outils astucieux (fonctions, dérivées, limites...)

L'analyse est utilisée dans toutes les branches d'ingénieries et même en Biologie, Pharmaceutique, Economie,

I. Algèbre élémentaire

§. I. 1. Ensembles numériques

Nous travaillerons avec les ensembles suivants:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$

Il ya des nombres qui ne sont pas des rapports entre nombres entiers: $\pi, \sqrt{2}, \phi, e, \dots$

La collection de tous ces nombres avec $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire $\mathbb{R}$.

Il existe une somme $+$ et un produit $\times$ sur les réels.

§I.2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Pour $x, y \in \mathbb{R}$ $x \geq y$ veut dire

"x est plus grand ou égal à y".

Propriétés: 1) $\geq$ est une relation totale, c'à-d

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, soit $x \geq y$ soit $y > x$

↑ Pour tout choix de ($\geq$ et $\neq$)

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geq x$

3a) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \geq y$ et $y \geq x \Rightarrow x = y$

3b) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \geq y$, $y \geq z \Rightarrow x \geq z$

4) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \geq y \Rightarrow x + z \geq y + z$

5) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$

Conséquences:

$$1) \forall x, y, a, b \in \mathbb{R} \quad x \geq y \text{ et } a \geq b, \text{ alors } x+a \geq y+b.$$

$$\text{En effet, } x \geq y \xRightarrow{\text{P.4}} x+a \geq y+a$$

$$a \geq b \xRightarrow{\text{P.4}} y+a \geq y+b$$

Donc, $x+a \geq y+b$ par transitivité de $\geq$.

(3^b si $x \geq y$ et $y \geq z$ alors $x \geq z$)

$$2) \forall a, x, y \in \mathbb{R}, a \geq 0 \text{ et } x \geq y \Rightarrow ax \geq ay$$

$$\text{En effet, } x \geq y \xRightarrow{\text{P.4}} x-y \geq y-y=0$$

$$\Rightarrow a(x-y) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax - ay \geq 0$$

P.5

$$\xRightarrow{\text{P.4}} ax \geq ay$$

$$3) \forall a, x, y \in \mathbb{R}, a \leq 0, x \geq y \Rightarrow ax \leq ay$$

$$\text{En effet, si } a \leq 0 \xRightarrow{\text{P.4}} 0 \leq -a$$

$$\Rightarrow (-a)x \geq (-a)y$$

$$\xRightarrow{\text{P.4}} ay \geq ax.$$

Exemples: 1) $7 \geq 5$, mais $-14 \leq -10$
 $(-2) \cdot 7 \quad (-2) \cdot 5$

Notations: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

On note aussi $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

$$\bullet \mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$$

Résoudre $x^2 \geq x + 2$ ①

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \geq 0 \quad (\text{P.4})$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+1) \geq 0$$

Tableau des signes:

	-1	2	
			$\rightarrow x$
$(x-2)$	-	-	+
$(x+1)$	-	+	+
$(x+1)(x-2)$	+	-	+

Donc, solutions à ①: $x \leq -1$ ou $x \geq 2$

on écrit aussi:

$$S =]-\infty, -1] \cup [2, \infty[$$

ensemble des solutions

Exemple: si $x \in [3, 5]$ et $y \in [2, 4]$

$$3 \leq x \leq 5$$

$$2 \leq y \leq 4$$

que dire sur $x+y$?

$$3 \leq x \leq 5$$

$$2 \leq y \leq 4$$

$$\frac{5 \leq x+y \leq 9}{\Rightarrow x+y \in [5, 9]}$$

Que dire de $x-y$?

Faux:

$$3 \leq x \leq 5$$

$$2 \leq y \leq 4$$

$$\frac{1 \leq x-y \leq 1}{\text{X}}$$

Correct:

$$3 \leq x \leq 5$$

$$-4 \leq -y \leq -2$$

$$\frac{-1 \leq x-y \leq 3}{\checkmark}$$

Exemple: Résoudre $x(x-1) \geq x-1$ (3)

Faux:

simplifier par $(x-1)$:

$$x \geq 1$$

⚠ on ne sait pas le signe de $x-1$ ⚠

Correct:

$$(3) \Leftrightarrow x(x-1) - (x-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-1) \geq 0$$

Toujours vrai $\Rightarrow \underline{\underline{x \in \mathbb{R}}}$

Résoudre $\frac{x+2}{x+1} \leq \frac{x-2}{x-1} \quad (*)$

$\bullet D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$\bullet (*) \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1} - \frac{x-2}{x-1} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-1) - (x-2)(x+1)}{(x+1)(x-1)} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{\cancel{x^2} + x - 2 - \cancel{x^2} + x + 2}{(x+1)(x-1)} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{(x+1)(x-1)} \leq 0$

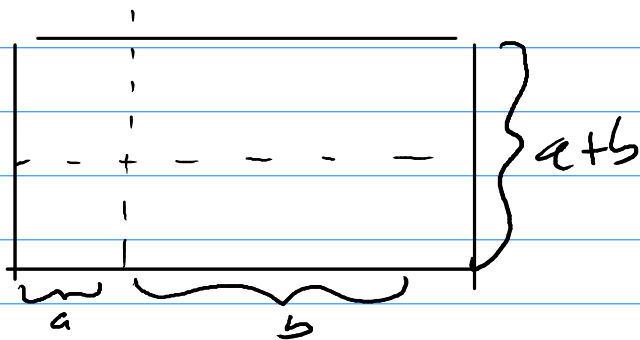
Tableau:

<u>Tableau:</u>				
	-1	0	1	
$2x$	-	-	+	+
$x+1$	-	+	+	+
$(x-2)$	-	-	-	+
④	-	+	-	+

$\Rightarrow S =]-\infty, -1[\cup [0, 1[$

§I.3. Identités remarquables

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$



Exemples:

$$\begin{aligned} & \bullet (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 3^2 - (\sqrt{2})^2 \\ & = 9 - 2 = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet \sqrt{3 - \sqrt{8}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \\ & = \sqrt{2+1 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1 - 2\sqrt{2} \cdot 1} \\ & = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \underline{\underline{\sqrt{2} - 1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

Exemples: ① $\frac{2}{3+\sqrt{2}} = \frac{2}{3+\sqrt{2}} \cdot \frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$

$\frac{6-\sqrt{18}}{7}$
 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

② $\frac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{2})^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2} - \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{2}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{4}}{4 - 2} - \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt[3]{2} + 2}{2} = \underline{\underline{\sqrt[3]{2} + 1}}$$

§1.4. (ln) - égalités avec paramètre

Factor $x+2 \leq 0$

• isoler x : $x \leq -2$

$\Rightarrow S = \underline{\underline{]-\infty, -2]}}$

Factor: $ux - 2 = 0$, résoudre pour x en fonction de la valeur de u .

• isoler x :

$ux = 2$

Où distinguer

$$\underline{m=0} :$$

$$\underline{S_{m=0} = \emptyset = \{\}} \quad \underline{m \neq 0} :$$

$$\underline{m \neq 0} :$$

$$\underline{S_{m \neq 0} = \left\{ \frac{2}{m} \right\}}$$

② Résoudre $mx - 2 \leq 0$

isoler x : $mx \leq 2$

Distinguer:

$$\underline{m < 0} :$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{2}{m}$$

$$\underline{m = 0} :$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$\underline{m > 0} :$$

$$x \leq \frac{2}{m}$$

$$\underline{S_{m < 0} = \left[\frac{2}{m}, +\infty \right[}, \quad S_{m=0} = \mathbb{R}, \quad S_{m > 0} =]-\infty, \frac{2}{m}]}$$

③ Utilisation des égalités remarquables:

$$(x+1)^3 > 125$$

pas de facteur donc

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 - 125 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 - 5^3 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1-5)((x+1)^2 + (x+1)5 + 25) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2 + 2x + 1 + 5x + 5 + 25) > 0$$

$$x^2 + 7x + 31 = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 31$$

$$\underline{x^2 + 2 \cdot \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 31}$$

$$\Leftrightarrow (x-4) > 0 \Rightarrow S =]4, \infty[$$

④ Résoudre: $\frac{x}{x+m} \leq \frac{m}{x+m}$

- $D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

- Comparer à 0:

$$\textcircled{4} \Leftrightarrow \frac{x}{x+m} - \frac{m}{x+m} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-m}{x+m} \leq 0$$

distinguer $m > 0$, $m = 0$, $m < 0$

	$-m$		m
$x-m$	-	-	+
$x+m$	-	+	+
E	+	-	+

$$\Rightarrow S_{m>0} =]-m, m]$$

$$\textcircled{4} \Leftrightarrow \frac{x}{x} \leq 0 \quad \Downarrow \Rightarrow S_{m=0} = \emptyset$$

	m		$-m$
$x-m$	-	+	+
$x+m$	-	-	+
E	+	-	+

$$S_{m<0} = [m, -m[$$

Méthode à suivre:

1: D_{def}

3: Factoriser

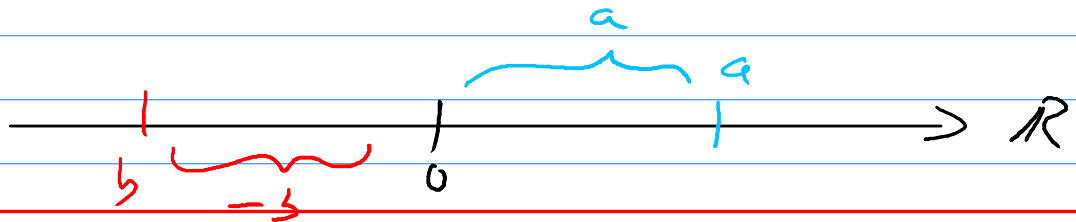
2: Comparer à 0

4: Tableau des signes
(en fct de m)

§1.5. Valeur propre

- Buts:
- résoudre des (in)-égalités avec valeur propre
 - pièges à éviter

La valeur absolue (ou valeur propre) d'un nombre est sa distance à 0 :



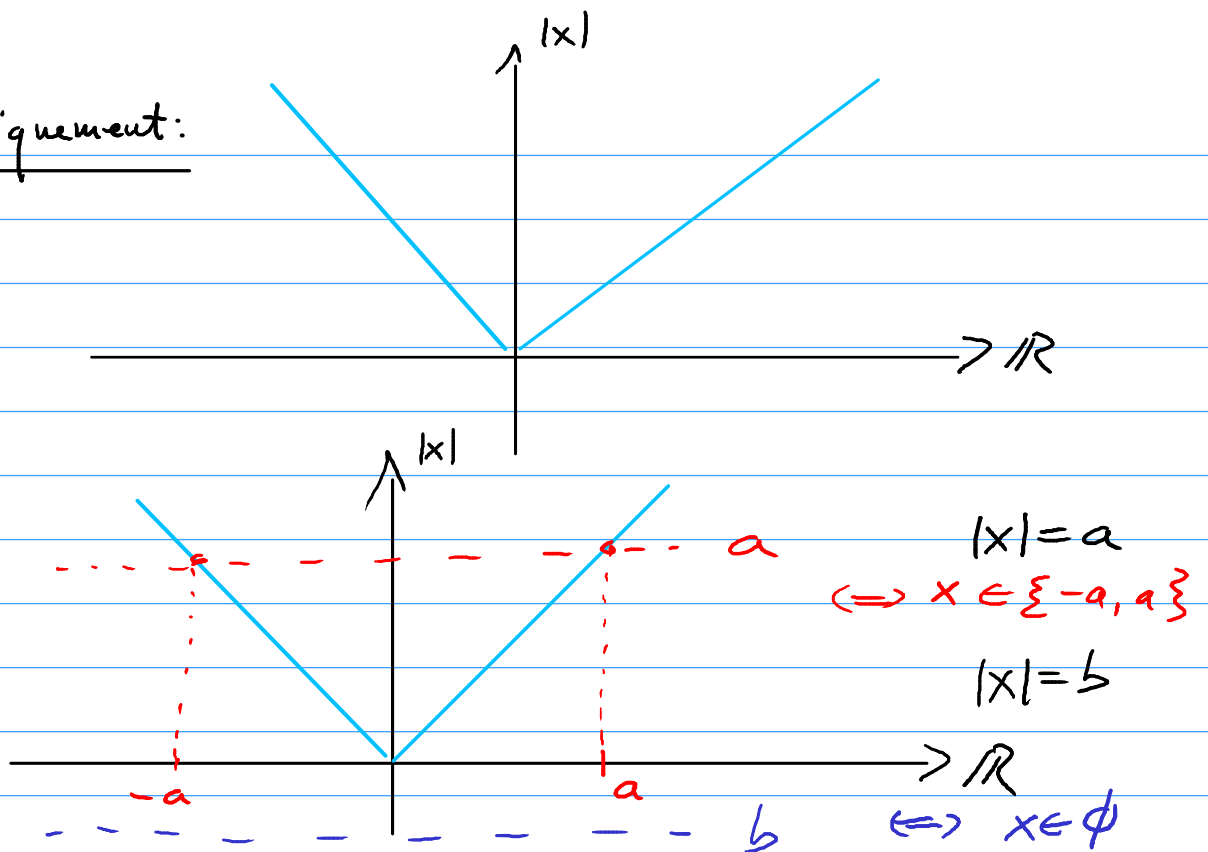
Déf: la valeur absolue d'un nombre $a \in \mathbb{R}$ est définie par

$$|a| := \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

Exemples:

- $|-5| = 5$
- $|3-2| = 2-3$
- $|x^2+1| = x^2+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } |x| \geq 1 \\ 1-x^2 & \text{si } |x| \leq 1 \end{cases}$
 $= \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \notin [-1, 1] \\ 1-x^2 & \text{si } x \in [-1, 1] \end{cases}$
- $|x| = \sqrt{x^2}$

graphiquement:



$$|x| = a \Leftrightarrow a \geq 0 \text{ et } \begin{cases} x = a \\ \text{ou} \\ x = -a \end{cases}$$

Plus généralement:

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \underline{g(x) \geq 0} \text{ et } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

condition de positivité

Exemples: ① Résoudre $|x^2 + 2x - 5| = x + 1$

• $D_{\text{def}} = \mathbb{R}$.

• $D_{\text{pos}} = [-1, \infty[$

Sur D_{pos}

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 5 = x + 1 & \textcircled{1a} \\ \text{ou} \\ x^2 + 2x - 5 = -x - 1 & \textcircled{1b} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0 & \textcircled{1a} \\ \text{ou} \\ x^2 + 3x - 4 = 0 & \textcircled{1b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 3)(x - 2) = 0 & \textcircled{1a} \\ \text{ou} \\ (x + 4)(x - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow S_{\textcircled{1a}} = \{-3, 2\}$$

$$S_{\textcircled{1b}} = \{-4, 1\}$$

$$\Rightarrow S_{\textcircled{1a} \text{ ou } \textcircled{1b}} = \{-4, -3, 1, 2\}$$

$$\Rightarrow S_{\textcircled{1}} = \{-4, -3, 1, 2\} \cap D_{\text{pos}} = \underline{\underline{\{1, 2\}}}$$

($x=1$ ou $x=2$), $x \in \{1, 2\}$)

à éviter: $|x^2 + 2x - 5| = x + 1$

~~$\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 5)^2 = (x + 1)^2$~~

② Résoudre $|x - 3u + 4| = x + u, \quad u \in \mathbb{R}$

• D_{def} : $x \in \mathbb{R}, \quad \bullet \quad D_{\text{pos}} = [-u, \infty[$

Sur D_{pos} :

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3u + 4 = x + u \\ \text{ou} \\ x - 3u + 4 = -x - u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} +4u = +4 \\ \text{ou} \\ 2x = -4 + 2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_{u=1} = \mathbb{R}, S_{u \neq 1} = \emptyset \\ S = \{u - 2\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{u=1} = [-1, \infty[$$

$$S_{u \neq 1} = \{u - 2\} \cap D_{\text{pos}}$$

Déterminer $m-2 \geq -m$ (si $m \neq 1$)
 $\Leftrightarrow 2m \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 1$

Conclusion:

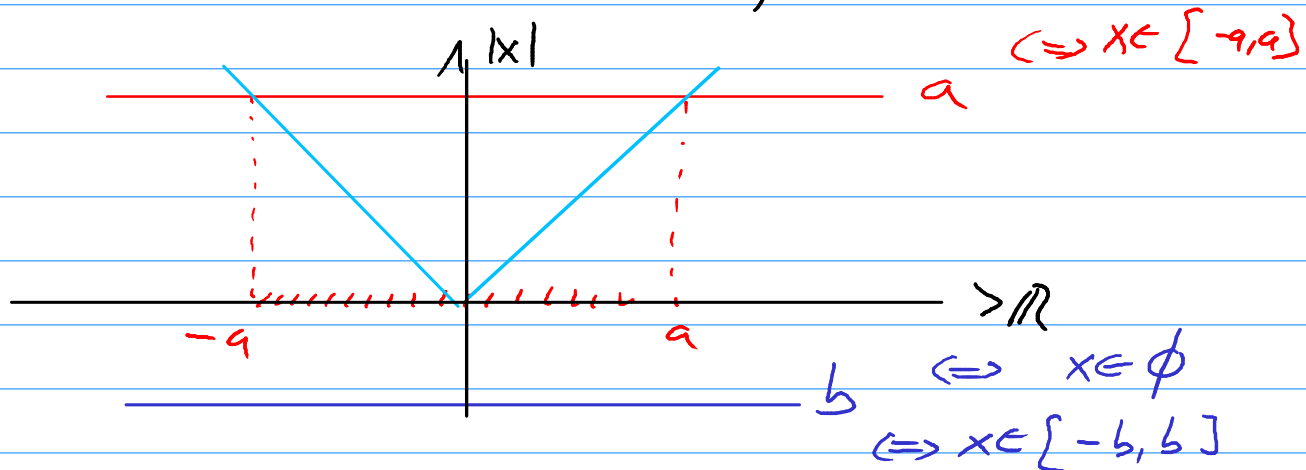
si $m < 1$, $S_m = \emptyset$

si $m = 1$, $S_m = [-1, 2[$

si $m > 1$, $S_m = \{m-2\}$

Inégalités avec valeur absolue:

Résoudre $|x| \leq a$, $a \in \mathbb{R}$



$$|x| \leq a \Leftrightarrow x \geq -a \text{ et } x \leq a$$

(pas de domaine de positivité
à vérifier)

Généralisation:

$$|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \text{et} \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases}$$

Exemple: ③ $\left| x - \frac{1}{x-1} \right| \leq \frac{-1}{x-1}$

• $D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Sur D_{def} :

③ $\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{x-1} \leq \frac{-1}{x-1} \\ \text{et} \\ x - \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x-1} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \text{et} \\ x - \frac{2}{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \text{et} \\ \frac{x(x-1)-2}{x-1} \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \frac{x^2-x-2}{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \text{et} \\ \frac{(x-2)(x+1)}{x-1} \geq 0 \end{cases}$

	-1	1	2	x
$(x-2)$	-	-	-	+
$(x+1)$	-	+	+	+
$(x-1)$	-	-	+	+
E	-	+	-	+

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \text{et} \\ x \in [-1, 1[\cup [2, \infty[\end{cases}$

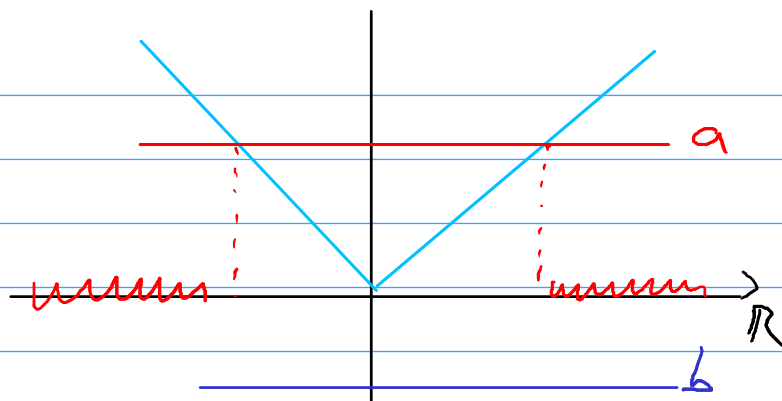
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \text{et} \\ x \in [-1, 1[\cup [2, \infty[\end{cases}$

$\Rightarrow \underline{\underline{S = [-1, 0]}}$

Résoudre

$$|x| \geq a$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -a] \cup [a, \infty[$$



$$|x| \geq b \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} =]-\infty, -b] \cup [b, \infty[$$

Généralement:

$$|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) \leq -g(x) \end{cases}$$

Exemple 4:

$$|x^2 + 3x - 1| > x^2 + x + 1$$

Pour $x \in D_{\text{def}} = \mathbb{R}$;

$$④ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 1 > x^2 + x + 1 \\ x^2 + 3x - 1 < -x^2 - x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 > 0 \\ \text{ou} \\ 2x^2 + 4x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \text{ou} \\ x(x+2) < 0 \end{cases}$$

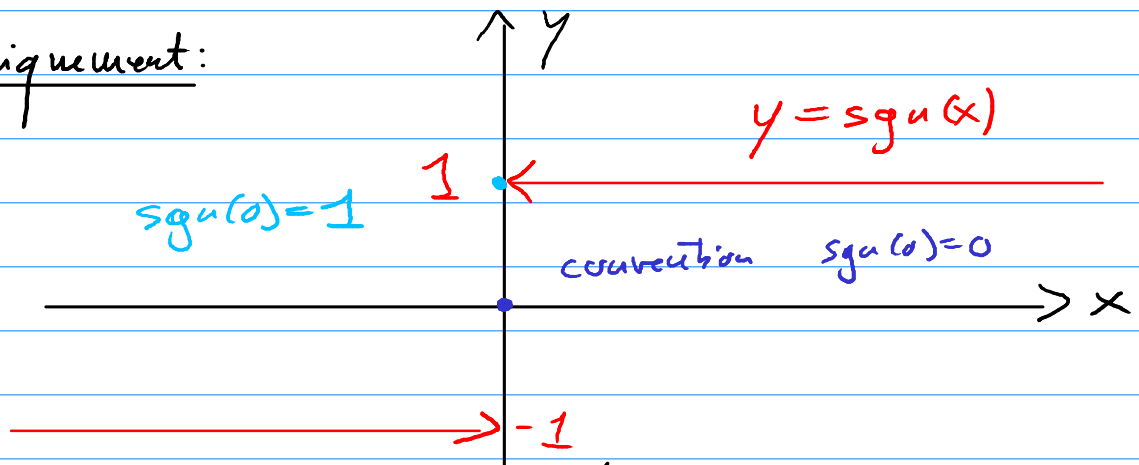
$$\Rightarrow \underline{\underline{S =]1, \infty[\cup]-2, 0[}}$$

Def: la fonction sgn, sgn(x), associe à chaque $x \neq 0$ la valeur $+1$ si $x > 0$ et -1 si $x < 0$.

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Discussion: pour $x=0$, il y a différentes conventions.
Pour certains $\text{sgn}(0)=0$, pour d'autres $\text{sgn}(0)=1$

graphiquement:



Propriétés: $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$

1) $x = |x| \cdot \text{sgn}(x)$

2) $\text{sgn}(x \cdot y) = \text{sgn}(x) \cdot \text{sgn}(y)$

3) $\text{sgn}\left(\frac{x}{y}\right) = \text{sgn}(x) \cdot \text{sgn}(y)$

Inégalité du triangle: $\forall x, y \in \mathbb{R}$
 $|x+y| \leq |x| + |y|$

preuve: $|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
 $\leq |x|^2 + 2|xy| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$

On prend la racine de chaque côté et

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

□

§1.6. Trinôme de 2^{ème} degré

Exemple: Quel est le signe

$$P(x) = x^2 - 4x - 5 \quad ?$$

$$\text{On a } P(x) = (x + 1)(x - 5)$$

$$\text{On remarque que } P(-1) = 0 = P(5)$$

$$\text{On conclut que } \text{sgn}(P(x)) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-1, 5[\\ 1 & \text{si } x \notin]-1, 5[\end{cases}$$

Déterminer en général le signe de

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$$

On a

$$P(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

$$= a \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} \right)$$

$$= a \left(\underline{x^2} + \underline{2 \cdot \frac{b}{2a}x} + \underline{\frac{b^2}{4a^2}} - \underline{\frac{b^2}{4a^2}} + \underline{\frac{c}{a}} \right)$$

$$= a \left(\underline{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2} - \underline{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \right)$$

$$= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right), \text{ où } \Delta = b^2 - 4ac$$

• si $\Delta \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 P(x) &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{(\sqrt{\Delta})^2}{(2a)^2} \right) \\
 &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \right) \\
 &= a (x - x_-)(x - x_+) \\
 \text{où } x_{\pm} &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}
 \end{aligned}$$

Où en conclut

$$\text{sgn}(P(x)) = \begin{cases} \text{sgn}(a) & \text{si } x \notin]x_-, x_+[\\ -\text{sgn}(a) & \text{si } x \in]x_-, x_+[\end{cases}$$

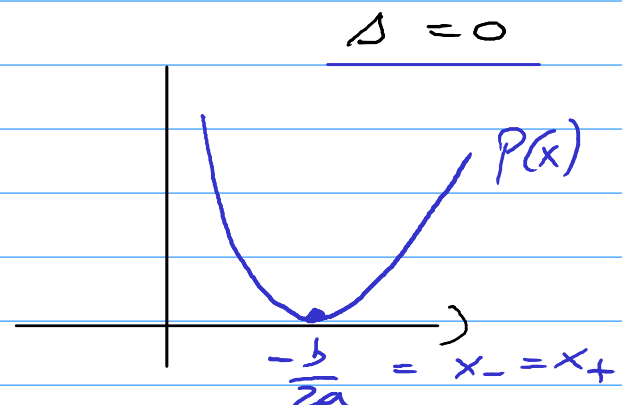
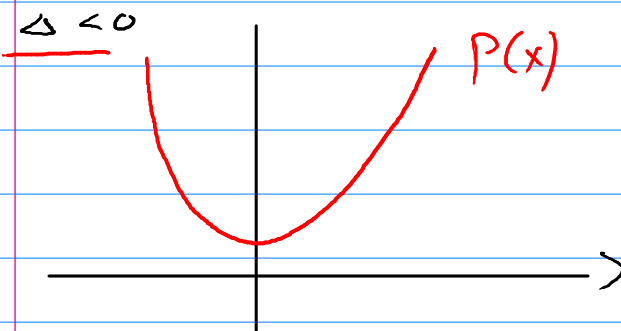
• si $\Delta < 0$:

$P(x)$ est la somme de deux carré, multiplié par a :

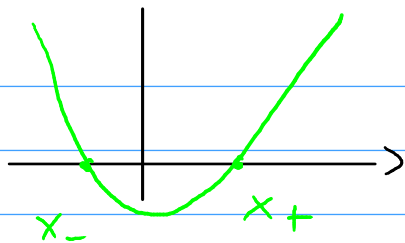
$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{sgn}(P(x)) = \text{sgn}(a)$$

graphiquement:

• si $a > 0$:

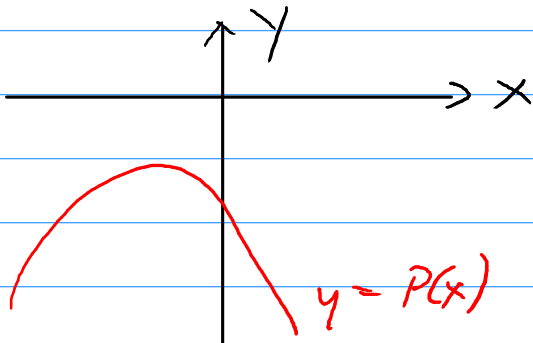


si $\Delta > 0$:

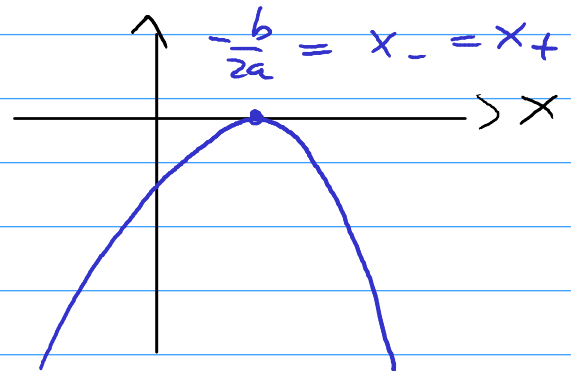


si $a < 0$:

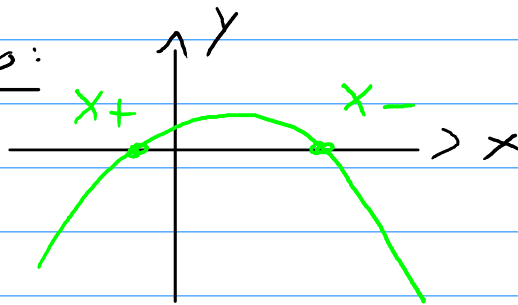
$\Delta < 0$:



$\Delta = 0$:



$\Delta > 0$:



Exemple ①: Déterminer le signe de

$$P(x) = x^2 - 2x - m^2 + 2m$$

$$a = 1 > 0.$$

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 - 2x + 1 - 1 - m^2 + 2m \\ &= (x - 1)^2 - (m - 1)^2 \end{aligned}$$

$$= (x - 1 - (m - 1))(x - 1 + m - 1)$$

$$= (x - m)(x + m - 2)$$

$P(x)$ possède deux racines: m et $2 - m$

Étudions si $m \geq 2 - m$ (c)

$$(c) \Leftrightarrow 2m \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 1$$

Conclusion: si $m \geq 1$:

$$P(x) > 0 \quad \text{si} \quad x \notin [2-m, m]$$

$$P(x) \leq 0 \quad \text{si} \quad x \in [2-m, m]$$

si $m < 1$:

$$P(x) > 0 \quad \text{si} \quad x \notin [m, 2-m]$$

$$P(x) \leq 0 \quad \text{si} \quad x \in [m, 2-m]$$

Exemple 2: Soit $P(x) = (2m+1)x^2 + 2(m-1)x + m-3$

Pour quel valeur de m ,

$$P(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad ?$$

Deux conditions: (C1) $a > 0 \Leftrightarrow 2m+1 > 0$

$$(C2) \quad \Delta \leq 0 \Leftrightarrow 4(m-1)^2 - 4(m-3)(2m+1) \leq 0$$

$$(C1): \quad \underline{m > -\frac{1}{2}}$$

$$(C2): \quad (m-1)^2 - (m-3)(2m+1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 - 2m^2 - m + 6m + 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 3m + 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3m - 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (m-4)(m+1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{u \in]-\infty, -1] \cup [4, \infty[}$$

Conclusion: $(c_1) \text{ et } (c_2) \Leftrightarrow \underline{u \in [4, \infty[}$

Exercice facultatif: Soient e et π .

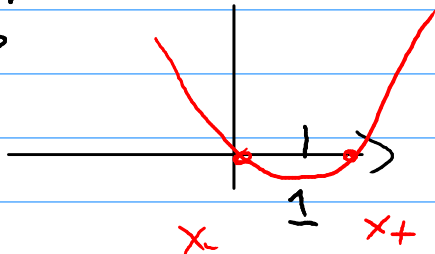
Montrer que $e+\pi$ et $e\cdot\pi$ ne peuvent pas être rationnels les deux

Exemple 3: Soit $P(x) = ux^2 - ux + (u+1)$

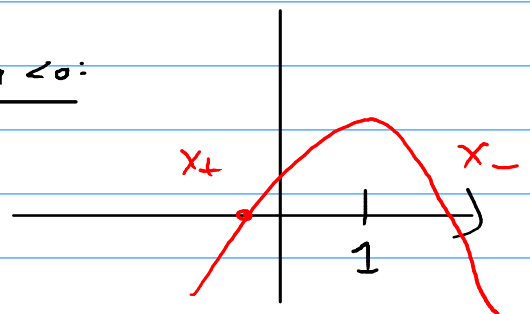
Trouver les valeurs de u d.g. $P(x)$ possède 2 racines x_- et x_+ d.g. $x_- < 1 < x_+$ ou $x_+ < 1 < x_-$

graphiquement:

si $a > 0$



si $a < 0$



$$\Leftrightarrow \underline{\text{sgn}(a P(1)) = -1.}$$

$$\Leftrightarrow u P(1) < 0$$

$$\Leftrightarrow u(u+1) < 0$$

$$\Leftrightarrow u \in]-1, 0[$$

§ 1.7. Puissances et racines

Buts:

- définir puissances racines
- résoudre (in)-égalités avec ces fonctions
- éviter des pièges

Def: La puissance d'un nombre $a \in \mathbb{R}$ est donnée par

$$a^n := \begin{cases} \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}} & \text{si } a \in \mathbb{R} \\ & \text{et } n \in \mathbb{N}^* \\ \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}}} & \text{si } a \in \mathbb{R}^* \\ & \text{et } n \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$$

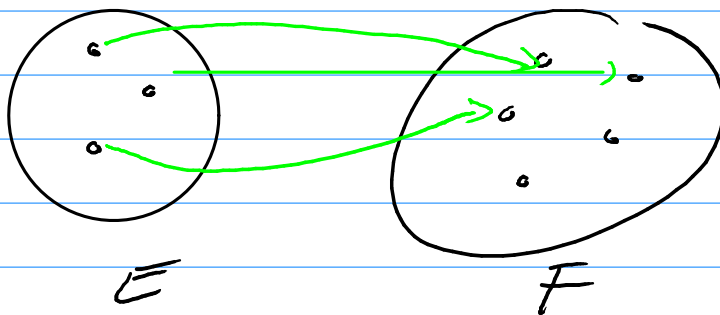
Convention: $\forall a \in \mathbb{R}, a^0 := 1$

Exemples: $\left(\frac{-2}{5}\right)^5 = \frac{(-2)^5}{5^5} = \frac{-32}{3125}$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-5} = \left(\frac{5}{2}\right)^5 = \frac{3125}{32}$$

- Soit E un ensemble à 3 éléments et F un ensemble à 5 éléments.

Combien y a-t-il de fonctions $f: E \rightarrow F$



Réponse: $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = |F|^{|E|}$

$$\text{si } E = \emptyset, \quad |E| = 0, \quad |F|^{|E|} = 1$$

Cela justifie $a^0 = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

Propriétés: 1) $\text{sgn}(a^n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \text{sgn}(a) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

$$2) (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$3) (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$4) (a)^n \cdot (a)^m = a^{n+m}$$

$$5) a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}$$

Déf: $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\sqrt[n]{a} = x = \begin{cases} x^n = a \\ \text{et} \\ \text{sgn}(a) = \text{sgn}(x) \end{cases}$$

Exemples: $\sqrt{4} = 2$, car $2^2 = 4$ et
 $\text{sgn}(2) = \text{sgn}(4)$

• $\sqrt[3]{-8} = -2$, car $(-2)^3 = (-8)$
et $\text{sgn}(-2) = \text{sgn}(-8)$

• si $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$

mais $\sqrt{4} = 2$

$\Leftrightarrow$ si $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{4}$

Remarque: l'ensemble de définition par $\sqrt[n]{x}$ est

$$\begin{cases} \mathbb{R}_+ & \text{si } n \text{ est pair} \\ \mathbb{R} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

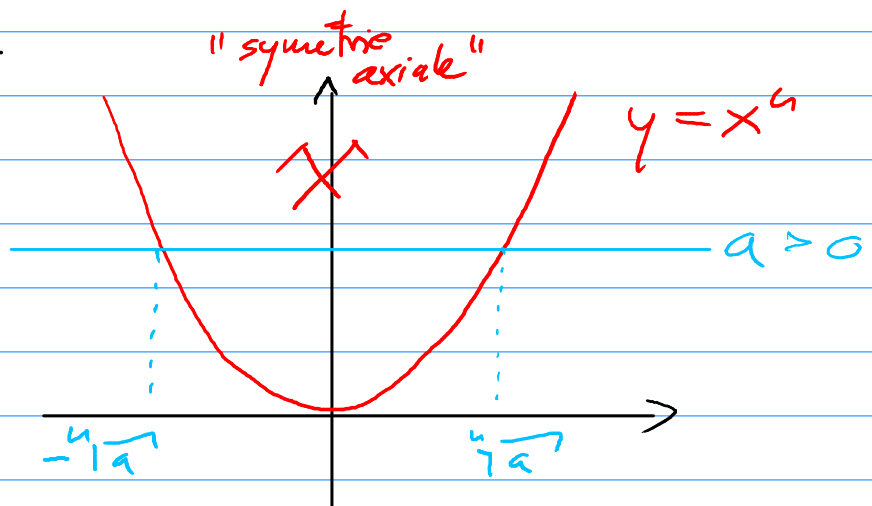
Propriétés: 1) $\sqrt[n]{a^n} = a$ si $a \in \mathbb{R}_+^*$

2) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ si $a, b \in \mathbb{R}_+^*$

3) $\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p$ si $a \in \mathbb{R}_+^*$

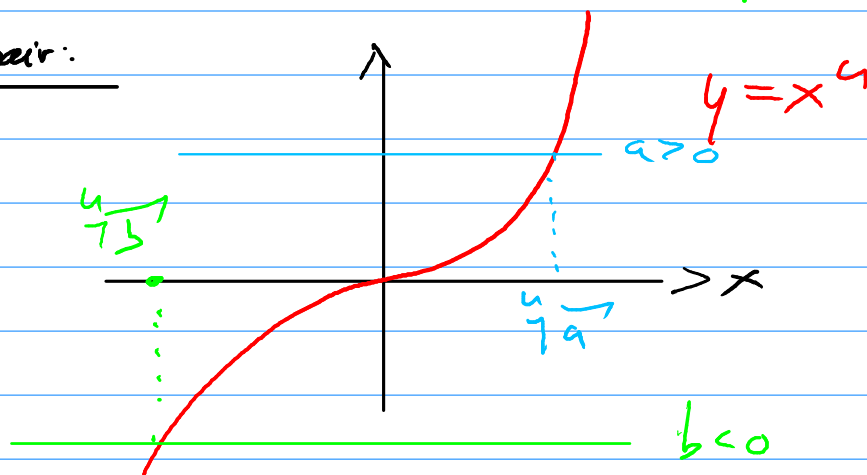
Graphiquement:

• pair:



$b < 0$
pas de solutions

• n impair:



Déf: Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $m, n \in \mathbb{N}^*$

$$a^{m/n} := \left(\sqrt[n]{a} \right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{-m/n} := \frac{1}{a^{m/n}}$$

 a est nécessairement positif pour la notation $a^{m/n}$

$$(-8)^{1/3} = (-2) \quad (-8)^{2/6} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Exemples:

(1) pour $a > 0$,

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a} = a^{1/3} \cdot a^{1/2} = a^{(1/3 + 1/2)} = a^{5/6}$$

(2) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}}} = ?$

écrivons

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}} \quad (f(x) \geq 0)$$

$$\Rightarrow f^2(x) = x + \underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}}_{f(x)}$$

$$\Rightarrow f^2(x) = x + f(x) \quad (f(x) \geq 0)$$

$$\Rightarrow \underset{a}{1} f^2(x) \overset{-1}{-} \underset{b}{f(x)} \overset{-x}{-} \underset{c}{x} = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1 + \sqrt{1+4x}}{2} \quad \left(f(1) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi \right)$$

$$\begin{aligned} & \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[3]{3}}}} = ? \\ & = \left(3^{\frac{1}{3}} \cdot \left(3^{\frac{1}{3}} \cdot \left(3^{\frac{1}{3}} \cdot (3)^{1/2} \right)^{1/2} \right)^{1/2} \right)^{1/2} \\ & \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{3^{5/2}} \\ & \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{3^{3/4}} \\ & \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{3^{7/4}} \\ & \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{3^{7/8}} \\ & \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{3^{15/8}} \\ & \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{3^{15/16}} \end{aligned}$$

Exemple 1: Résoudre

$$\sqrt{x^2 - 3x + 6} = 4x - 6 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \circ D_{\text{def}} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 6 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leftarrow \text{negatif}\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{D_{\text{def}} = \mathbb{R}}$$

$$\begin{aligned} \circ \underline{D_{\text{pos}}:} &= \{x \in \mathbb{R} \mid 4x - 6 \geq 0\} \\ &= \underline{\left[\frac{3}{2}, \infty \right[} \end{aligned}$$

Sur $D_{\text{pos}} \cap D_{\text{def}} = [-3/2, \infty[$ on élève $\textcircled{1}$ au carré:

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 6 = (4x - 6)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 6 = 16x^2 - 48x + 36$$

$$\Leftrightarrow 0 = 15x^2 - 45x + 30$$

$$= x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$S_{\textcircled{1}} = \{1, 2\} \cap D_{\text{pos}} = \underline{\underline{\{2\}}}$$

$\triangle$ avant d'élever au carré, déterminer le D_{pos} .

Généralement:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \stackrel{D_{\text{def}}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \text{et} \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

Exemple 2:

$$\sqrt{6-x} \leq 3+2x \quad \textcircled{2}$$

• D_{def} : $6-x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \underline{\underline{]-\infty, 6]}}$

• D_{pos} : $3+2x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-3/2, \infty[$

Sur $D_{\text{def}} \cap D_{\text{pos}} = [-3/2, 6]$, on élève au carré:

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow 6-x \leq 9 + 12x + 4x^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 3 + 13x + 4x^2$$

$$\Delta = 13^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 169 - 48 = 121$$

$$\Rightarrow x_{\pm} = \frac{-13 \pm 11}{8} = \begin{matrix} -3 \\ -1/4 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow S_{\text{②}} = \left(]-\infty, -3\right] \cup \left[-\frac{1}{4}, +\infty[\right) \cap \left[-\frac{3}{2}, 6\right] \\ = \underline{\underline{\left[-\frac{1}{4}, 6\right]}}$$

Généralisation:

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \stackrel{D_{\text{def}}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \text{et} \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \stackrel{D_{\text{def}}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} g(x) < 0 \\ \text{ou} \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$$

2. Suites

§2.1. Exemples et raisonnement par récurrence

On rencontre rapidement des suites de nombres:

1) $0, 2, 4, 6, 8, 12, \dots, 2u$ et $u \in \mathbb{N}$

est la suite des nombres pairs

2) $1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2u-1$ et $u \in \mathbb{N}^*$

3) 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... la suite des nombres premiers

4) 0, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, 3, ... la suite des racines.

5) 1, 1, 1, 1, 1, ... la suite constante de 1

6) On peut sommer les termes de la suite précédente :

$$s_0 = 0, \quad s_1 = 1, \quad s_2 = 2, \quad \dots$$

7) la suite 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... de nombres naturels peut être sommée aussi :

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 3, \quad s_3 = 6, \quad s_4 = 10, \quad s_5 = 15, \quad \dots$$

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

A montrer: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$
$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

1^{ère} idée: $s_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$

$$s_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$$

$$2s_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)$$

$$\Rightarrow 2s_n = n(n+1)$$

$$\Rightarrow s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2^{ème} idée: On raisonne par **réurrence** :

1) On vérifie si la formule $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie pour $n=1$ (**initialisation**).

2) On vérifie que si $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, alors $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ (**hérédité**).

$$\begin{aligned}\text{En effet, } S_{n+1} &= S_n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \checkmark\end{aligned}$$

3) Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Analogie avec les dominos : pour montrer qu'une chaîne de dominos tombe, il faut

1) faire tomber le 1^{er} domino

2) s'assurer que chaque domino qui tombe fait tomber son successeur

Exemple: la suite de Fibonacci.

Modèle de population de lapin:

Mois	1	2	3	4	5	6	7
* couple de lapin jeune	1	0	1	1	2	3	5
* couple mature	0	1	1	2	3	5	8

$$\# \text{ couples} \quad \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \\ 13 \end{array} \right| \dots$$

Cela crée la suite de $F_n = \# \text{ couples}$
donnée par

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_1 = 1, F_2 = 1$$

On obtient

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

$$\text{On a que } F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi_+^n - \phi_-^n) \text{ où}$$

$$\phi_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \phi_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Vérifications par récurrence:

1) $n=1$: $F_1 = 1$

et $\frac{1}{\sqrt{5}} (\phi_+^1 - \phi_-^1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1.$

$n=2$: $F_2 = 1$

et $\frac{1}{\sqrt{5}} (\phi_+^2 - \phi_-^2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{6-2\sqrt{5}}{4} \right) = 1$

2) Vérifications l'hérédité:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi_+^n - \phi_-^n) + \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi_+^{n-1} - \phi_-^{n-1})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi_+^{n-1} (\phi_+ + 1) - \phi_-^{n-1} (\phi_- + 1))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi_+^{u-1} \underbrace{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}_{\phi_+^2} - \phi_-^{u-1} \underbrace{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}_{\phi_-^2} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi_+^{u+1} - \phi_-^{u+1} \right)$$

3) Conclusion:

$$\forall u \in \mathbb{N}^*, \quad F_u = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi_+^u - \phi_-^u \right)$$

Pour une récurrence, pour tester une formule $F(u)$.

1) Initialiser: On vérifie si $F(1)$ est vraie

2) Hérédité: On vérifie que si $F(u)$ est vraie alors $F(u+1)$ aussi

3) Conclure: $F(u)$ est vraie $\forall u \in \mathbb{N}^*$.

En général:

Def: Une suite (réelle) est une application

$$s: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}.$$

On note une telle suite par $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

s_n est appelé le terme général de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Thm: $\nexists r \in \mathbb{Q}$ t.q. $r^2 = 2$

preuve: par absurde: supposons que $r^2 = 2$ et $r \in \mathbb{Q}_+^*$.

On a donc $r = \frac{u}{m}$, $u, m \in \mathbb{N}^*$. Par le TFAr, On a

$$r = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdots p_N}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_M} \quad \text{et}$$

$$\{p_1, \dots, p_N\} \cap \{q_1, \dots, q_M\} = \emptyset$$

Mais alors

$$\frac{p_1^2 \cdot p_2^2 \cdots p_N^2}{q_1^2 \cdot q_2^2 \cdots q_M^2} = 2$$

et donc

$$p_1^2 p_2^2 \cdots p_N^2 = 2 \cdot q_1^2 \cdot q_2^2 \cdots q_M^2$$

par unicité de la factorisation en premiers,

$$p_1^2 = 2 \quad \downarrow$$

□.

Ex. facultatif: $\nexists r \in \mathbb{Q}$ t.q. $r^2 = p$ premier

Essayons de trouver $S: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}^+$ qui approche $\sqrt{2}$:

$$\text{Si } x^2 = 2 \iff x^2 = 1 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 1$$

$$\Leftrightarrow x-1 = \frac{1}{1+x}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{1+x}$$

$x = 1 + \frac{1}{1+x}$

$$\Rightarrow x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+x}}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+x}}}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}$$

previous $x_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5}$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12}$$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ approche $\sqrt{2}$

$$Q_n \cdot X_8 = 1.919 \ 215 \ 686 \ 27$$

$$|\bar{Z}| = 1, 414 \ 213 \ 562 \ 37 \dots$$

Autres exemples:

$$(1) \quad a_n = \frac{1}{3n-7}, \quad a_1 = -\frac{1}{4}, \quad a_2 = -1, \\ a_3 = \frac{1}{2}, \dots$$

suite explicite

$$(2) \quad 1, 6, 11, 16, 21, \dots$$

$$a_n = 5n - 4 \quad (\text{formule explicite})$$

$$(3) \quad \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{10}{9}, \frac{17}{12}, \dots$$

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{3n}$$

$$(4) \quad 3, 0, 9, 0, 15, 0, 21, 0, 27, 0, \dots$$

$$a_n = 3n (1 - (-1)^n) \frac{1}{2} \\ = 3n \sin^2(n\pi/2)$$

$$(5) \quad a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}, \quad a_1 = 3/2$$

suite récurrente

$$a_n = \frac{n+2}{n+1}$$

Vérifions par récurrence:

1) Initialiser: $a_1 = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2} \checkmark$

2) Héritage: $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$
 $= 2 - \frac{1}{\frac{(n+2)}{n+1}} = 2 - \frac{n+1}{n+2}$

↑
hypothèse de
récurrence

$$= \frac{2(n+2) - (n+1)}{n+2} = \frac{n+3}{n+2}$$
$$= \frac{(n+1)+2}{(n+1)+1} \checkmark$$

§22. Limite d'une suite

Def. Soit $s: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que

- $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée si $\exists M \in \mathbb{R}$ s.t.
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n \leq M$
- $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement majorée par $M \in \mathbb{R}$
ssi $\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n < M$.
- $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est (strictement) minorée par $m \in \mathbb{R}$
ssi $\forall n \in \mathbb{N}^*, m \leq (<) s_n$
- $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée ssi elle est minorée
et majorée.

Encore un peu de vocabulaire:

Def: une suite $a: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ est dite

- (strictement) croissante si $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$a_{n+1} \underset{(>)}{>} a_n$$

- (strictement) décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$a_{n+1} \underset{(<)}{\leq} a_n$$

- montone si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est soit décroissante, soit croissante.

Exemples: ① $a_n = \frac{1}{n}$ est strictement décroissante.

En effet, $a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow n < n+1 \checkmark$

a_n est majorée par 1 et strictement minorée par 0.

Elle est donc bornée. la suite est aussi majorée

par 2, 3, 4, ... et minorée par
-1, -2, ...

② $b_n = \frac{n}{n+1}$. $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement minorée par 0 et strictement majorée par 1. Elle est strictement croissante, car

$$b_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

③ $c_n = (-1)^n \cdot n$ est ni croissante, ni décroissante, ni majorée, ni minorée.

Reprenons l'exemple (2). $b_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

• Pour $n \geq 1$, $\frac{1}{2} \leq b_n \leq 1$

• Pour $n \geq 10$, $\frac{10}{11} \leq b_n \leq 1$

• Pour $n \geq 100$, $\frac{100}{101} \leq b_n \leq 1$

Choisissons $\varepsilon > 0$ (erreur ou largeur de bande)

À partir de quel $n \in \mathbb{N}^*$ a-t-on

$$1 - \varepsilon \leq b_n \leq 1 \quad ?$$

$$\Leftrightarrow 1 - \varepsilon \leq \frac{n}{n+1} \leq 1 \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \cancel{1 - \varepsilon} \leq \cancel{1 - \frac{1}{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon \geq \frac{1}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} \leq n+1$$

Donc, si $n \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1}_{\text{partie entière}}$, alors

$$1 - \varepsilon \leq b_n \leq 1$$

la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ s'approche de 1 de plus en plus (ε de plus en plus petit) à condition que n soit très grand.

On pose alors ℓ_n

Def: On dit qu'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $l \in \mathbb{R}$, et on écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \quad \text{s si}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists u_0 \in \mathbb{N}^* \text{ d.t. } n \geq u_0 \\ |a_n - l| < \varepsilon$$

On dit que la limite de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est l si les éléments a_n sont aussi proche que l'on veut de l si n est suffisamment grand.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists u_0 \text{ d.t. } n \geq u_0 \\ |a_n - l| < \varepsilon$$

Comment vérifier si l est la limite de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

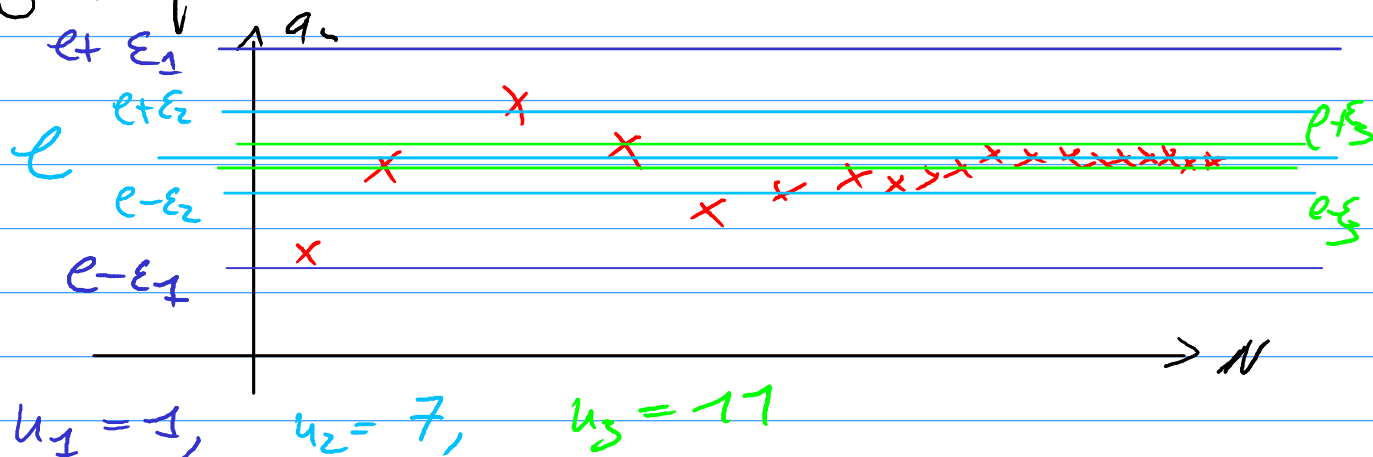
1) On se donne $\varepsilon > 0$

2) On cherche les $n \in \mathbb{N}^*$ d.t. $|a_n - l| < \varepsilon$

3) Si ces deux étapes sont possibles pour

tout ε , alors l est bien la limite.

graphiquement:



Exemples: ① $q_n = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Soit $\varepsilon > 0$, (on devine que $l = 2$)

$$|q_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow |2 - 2| < \varepsilon$$

$\Leftrightarrow 0 < \varepsilon$ Vrai $\forall n \in \mathbb{N}^*$. On

choisit $n_0 = 1$ et $n \geq 1$ implique

$$|q_n - 2| < \varepsilon.$$

3 n'est pas la limite, car si $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$|q_n - 3| < \frac{1}{2} \text{ n'a pas de solutions.}$$

② $q_n = \frac{1}{n}$. On devine que la limite est 0.

Soit $\varepsilon > 0$

$$|q_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. On choisit $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ partie entière

et $n \geq n_0$ implique $n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$

$$|a_n - 0| < \varepsilon.$$

Si $\varepsilon = \frac{1}{10}$, $n_0 = 11$ et si $n \geq 11$,

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \frac{1}{10}$$

• Si $\varepsilon = \frac{1}{10'000}$, $n_0 = 10'001$, si $n \geq 10'001$
alors $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \frac{1}{10'000}$

Si on avait choisi $\ell = 1$. Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$

$$\left| \frac{1}{n} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} - \frac{n}{n} \right| < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n-1}{n} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(n-1) < n$$

$\Leftrightarrow n < 2$. Il n'y a pas de n_0 t.q.

$$n \geq n_0 \quad \left| \frac{1}{n} - 1 \right| < \frac{1}{2}.$$

③ $a_n = \left(\frac{2n+1}{n} \right)^2$. On devine que $\ell = 4$.

• Prendre $\varepsilon > 0$.

• Résoudre $|a_n - 4| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left| \left(\frac{2n+1}{n} \right)^2 - 2^2 \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \left(\frac{2n+1}{n} - 2 \right) \left(\frac{2n+1}{n} + 2 \right) \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} \left(\frac{4n+1}{n} \right) \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 4n+1 < \varepsilon n^2 \Leftrightarrow 0 < \varepsilon n^2 - 4n - 1$$

$$n > \frac{4 + \sqrt{16 + 4\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{4 + \varepsilon}}{\varepsilon}$$

on choisit $n_0 = \left\lfloor \frac{2 + \sqrt{4 + \varepsilon}}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$

Donc, $n \geq n_0 \quad |a_n - 4| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4.$$

Dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ c'est dire que
pour un $\varepsilon > 0$, au plus un nombre fini des
a_n vérifiant $|a_n - l| \geq \varepsilon$

Exemple: $a_1 = 0,9, \quad a_2 = 0,99, \quad a_3 = 0,999,$

$$a_4 = 0,9999,$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 = 0,999999999999\dots$$

$$\frac{1}{3} = 0,3333333333\dots$$

$$3 \times \frac{1}{3} = 1 = 0,9999999999\dots$$

Règles de calcul:

Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b} \quad \text{si } b \neq 0 \text{ et } b_n \neq 0 \text{ pour } n \text{ grand}$$

Exemples: ① $a_n = \frac{n^2 + 1}{(n+1)(2n-1)}$

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{(n+1)(2n-1)} \quad \begin{matrix} \times \frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{n} \times (n+1)(2n-1) \times \frac{1}{n} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1+0}{(1+0)(2-0)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1+0}{(1+0)(2-0)} \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1+0}{1 \cdot 2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n^2})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{n})} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad a_n = \sqrt{n^2 - n} - n$$

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n^2 - n} - n \cdot \frac{\sqrt{n^2 - n} + n}{\sqrt{n^2 - n} + n} \\ &= \frac{-n}{\sqrt{n^2 - n} + n} \cdot \frac{1/n}{1/n} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underline{\underline{-\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

§2.3. Théorème des gendarmes

Thm: Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Supposons que

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

- $\exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } n \geq N \implies b_n \geq a_n$

Alors $b \geq a$

preuve: Supposons (per absurde) que $a > b$.
Alors $a - b > 0$. Posons $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$.

Par hypothèse,

- $\exists N_1 \text{ t.q. } n \geq N_1 \implies |a_n - a| < \varepsilon$

- $\exists N_2 \text{ t.q. } n \geq N_2 \implies |b_n - b| < \varepsilon$

Si $n \geq \max \{N_1, N_2\}$ on aurait

- $-\varepsilon < b_n - b < \varepsilon$

- $-\varepsilon < a - a_n < \varepsilon$

$$\Rightarrow -2\varepsilon < \underbrace{b_n - a_n}_{b-a} + \underbrace{a-b}_{a-b} < 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \cancel{+b-a} < b_n - a_n + \cancel{a-b} < \cancel{a-b}$$

$2(b-a)$ 0

$$\Rightarrow 2(b-a) < b_n - a_n < 0$$

$$\Rightarrow b_n < a_n \quad \downarrow \quad \square.$$

Thm des gendarmes: Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que:

- $\exists N$ t.q. $n \geq N \Rightarrow g_n \leq a_n \leq d_n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \ell$.

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$.

preuve: Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$

- $\exists N_1$ t.q. $n \geq N_1 \Rightarrow |g_n - \ell| < \varepsilon$
- $\exists N_2$ t.q. $n \geq N_2 \Rightarrow |d_n - \ell| < \varepsilon$

Si $n \geq \max \{N, N_1, N_2\}$ alors

$$-\varepsilon < g_n - \ell \leq \underline{a_n - \ell} \leq d_n - \ell < \underline{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$$

ε étant arbitraire, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ $\square$.

Exemples: ① $a_n = \frac{2}{3}, 0, \frac{4}{15}, 0, \frac{6}{35}, 0, \frac{8}{63}, 0, \dots$

$$a_n = \frac{n+1}{n(n+2)} \cdot \sin^2(n\pi/2)$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\leq 1/n}$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq a_n \leq \underbrace{1/n}_{g_n}$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\Rightarrow \text{ThG } \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0}$$

② $a_n = \frac{n+2}{n + \sin(n\pi/2)}$

$$\underbrace{\frac{n+2}{n+1}}_{g_n} \leq a_n \leq \underbrace{\frac{n+2}{n-1}}_{d_n} \quad \text{si } n \geq 2$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n,$$

$$\text{on a ThG que } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

Corollaire: Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0, \text{ alors}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

preuve: on prend $g_n = -|a_n|$,
 $d_n = |a_n|$ et on applique le Th. 6. 5.

⚠ Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \ell \neq 0$ Alors
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ est faux.

Contre-exemple, $a_n = (-1)^n$

Thm de la convergence monotone: Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
une suite monotone. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée
Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existe (et est son
supremum (ou infimum).)

preuve: aller en math! □.

Exemples: ① $a_n = 0, \underbrace{999 \dots 9}_n = 1 - 10^{-n}$.

$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. (monotone)

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée par 0 (inf.) et 1 (sup.).

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ existe.

② $a_1 = 1, a_2 = 1 + \frac{1}{2^2}, a_3 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2},$

$a_4 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}, \dots,$

$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.

$$\begin{aligned} 0 \leq a_n &\leq 1 + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} \\ &= 1 + \quad \quad \quad -\frac{1}{2} + 1 \quad -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \quad \quad \quad -\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \\ &\leq 2 - \frac{1}{n} = 2 \end{aligned}$$

Donc, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existe la valeur est inconnue (problème de Babel) jusqu'à ce que Euler trouve que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\pi^2}{6}$

§2.3. limites infinies

⚠ L'infini n'est pas un nombre (réel).
Que signifie donc avoir une limite infinie?

Def: On écrit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ssi

$\forall B > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } n \geq N$
 $a_n \geq B.$

On écrit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ssi

$\forall B < 0, \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } n \geq N$
 $a_n \leq B.$

Exemples: ① $a_n = 2n - n^2$

On devine que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

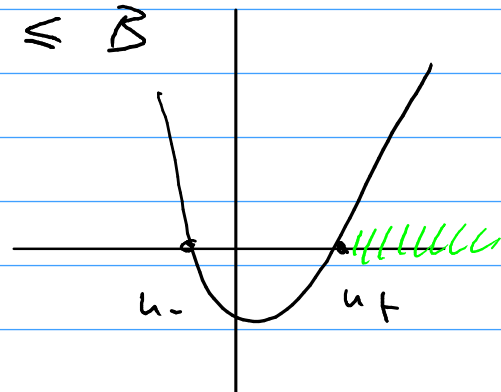
Soit $B < 0$. Résolvons $a_n \leq B$

$$\Leftrightarrow 2n - n^2 \leq B$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq n^2 - 2n + B$$

$$\text{si } n \geq n_+ = \frac{2 + \sqrt{4 - 4B}}{2}$$

$$\text{alors } a_n \leq B$$



$$\text{on pose } N = \lfloor 1 + \sqrt{1 - B} \rfloor + 1$$

si $n \geq N$, $a_n \leq B$ et on a montré que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

(On aurait pu choisir $\lfloor 1 + \sqrt{1 - B} \rfloor + 2$
ou bien $3 \lfloor 1 + \sqrt{1 - B} \rfloor + 5$)

Contre-exemple: $a_n = 1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, 9, \dots$

$$a_n = \begin{cases} 2k+1 & \text{si } n = 2k+1 \\ 0 & \text{si } n = 2k \end{cases}$$

Cette suite ne converge pas vers l'infini,
car si $B > 0$, alors $a_{2k} < B$.

Règles de calculs:

1) si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont telles que
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée,
alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$.

2. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ et $\lambda > 0$, alors
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \infty$.

3. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Thm du gendarme: Si $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty$
et $a_n \geq d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Alors
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = -\infty$ et $a_n \leq g_n \quad \forall n \geq N$
alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

⚠ cas indéterminés:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$

alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = ? \quad (\pm \infty, \in \mathbb{R})$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = ? \quad (\pm \infty, \in \mathbb{R})$

Exemples: ① $a_n = \sqrt{u^3+1} - \sqrt{u^3+u^2+1}$
cas indéterminé (travailler la suite)

$$\begin{aligned}
 a_n &= \sqrt{u^3+1} - \sqrt{u^3+u^2+1} \cdot \frac{\sqrt{u^3+1} + \sqrt{u^3+u^2+1}}{\sqrt{u^3+1} + \sqrt{u^3+u^2+1}} \\
 &= \frac{\cancel{u^3+1} - \cancel{u^3} - u^2 - \cancel{1}}{\sqrt{u^3+1} + \sqrt{u^3+u^2+1}} \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{u} + \frac{1}{u^4}} + \sqrt{\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^4}}} \quad \xrightarrow{u \rightarrow \infty} -\infty
 \end{aligned}$$

$\xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0 \quad \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0 \quad \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0$

② $a_n = \sqrt{u^4+1} - \sqrt{u^4+u^2+1}$
(cas " $\infty - \infty$ ")

$$\begin{aligned}
 a_n &= \sqrt{u^4+1} - \sqrt{u^4+u^2+1} \cdot \frac{\sqrt{u^4+1} + \sqrt{u^4+u^2+1}}{\sqrt{u^4+1} + \sqrt{u^4+u^2+1}} \\
 &= \frac{\cancel{u^4+1} - \cancel{u^4} - u^2 - \cancel{1}}{\sqrt{u^4+1} + \sqrt{u^4+u^2+1}} \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{1}{u^4}} + \sqrt{1 + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^4}}} \quad \xrightarrow{u \rightarrow \infty} \frac{-1}{2}
 \end{aligned}$$

$\xrightarrow{u \rightarrow \infty} 1 \quad \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 1 \quad \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 2$

Exemple type contrôle 1:

Calculer la limite de $q_n = \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^2$ et vérifier par la définition de la limite.

a) Calcul de la limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3 + 1/n}{4}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{9}{16}}}$$

b) Soit $\varepsilon > 0$. Trouver N t.q.

$$n \geq N \Rightarrow \left| \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^2 - \frac{9}{16} \right| < \varepsilon$$

↑
trouver n ↑
donné

$$\Leftrightarrow \left| \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \left(\frac{3n+1}{4n} - \frac{3}{4}\right) \left(\frac{3n+1}{4n} + \frac{3}{4}\right) \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3n+1-3n}{4n}\right) \left(\frac{3n+1+3n}{4n}\right) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4n} \cdot \frac{6n+1}{4n} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 6n+1 < \varepsilon 16n^2$$

$$\Leftrightarrow 0 < 16\epsilon u^2 - 6u - 1$$

$$\text{si } u > \frac{6 + \sqrt{36 + 64\epsilon}}{32\epsilon} \quad (u_+)$$

$$\text{ou pose } N = \left\lfloor \frac{3 + \sqrt{9 + 16\epsilon}}{16\epsilon} \right\rfloor + 1$$

$$\text{si } u \geq N \text{ alors } |a_u - \frac{9}{16}| < \epsilon$$

§2.4 Suites importantes

Def: Une suite géométrique est une suite du type $a_n = q^n$, $q \in \mathbb{R}$ est la raison de la suite

$$\text{Si } |q| < 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

preuve: Si $|q| < 1$, alors $\frac{1}{|q|} > 1$ et
 $\exists d > 0$ tq. $\frac{1}{|q|} = 1 + d$ et
 $|q| = \frac{1}{1+d}$

$$|q|^n = \left(\frac{1}{1+d} \right)^n = \frac{1}{(1+d)^n}$$

$$= \frac{1}{\sum_{k=0}^n (1)^k (d)^{n-k} \binom{n}{k}} = \frac{1}{1 + nd + \dots}$$

$$\leq \frac{1}{1+u^d} \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0$$

- si $q = 1$, $a_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$
- si $q = -1$, $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2k \\ -1 & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$

a_n diverge.

- si $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

- si $q < -1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$

mais $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ n'existe pas.

Def: la suite de terme général

$a_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$
est une série géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$

Remarque: On a comme variation la

suite $a_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$

• Si $q = 1$: $a_n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n$

• si $q = -1$: $a_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1}$

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2k+1 \\ 0 & \text{si } n = 2k \end{cases}$$

• si $q \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \dots + \cancel{q^{n-1}} \\ q a_n &= \cancel{q} + \cancel{q^2} + \cancel{q^3} + \dots + q^n \end{aligned}$$

$$a_n - q a_n = 1 - q^n = a_n (1 - q)$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}}$$

De la même manière,

$$\boxed{a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}}$$

Exemples: ① Pour franchir une distance

L on doit franchir d'abord $\frac{L}{2}$, puis $\frac{L}{4}$, puis $\frac{L}{8}$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \dots + \frac{L}{2^n} \\ &= \frac{L}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{L}{2} \left(\frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} \right) = L (1 - (1/2)^n)$$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

② écriture décimale:

Considérons $\overline{4,321}$. On a

$4,321321321321 \dots$

$$= 4 + \frac{321}{1'000} + \frac{321}{1'000'000} + \frac{321}{1'000'000'000} + \dots$$

$$= 4 + \frac{321}{1'000} \left(1 + \frac{1}{1'000} + \frac{1}{1'000'000} + \dots \right)$$

$$= 4 + \frac{321}{1'000} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{1'000}\right)^n}{1 - \frac{1}{1'000}}$$

$$= 4 + \frac{321}{999} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{1}{1'000}\right)^n \right)$$

$$= 4 + \frac{321}{999}$$

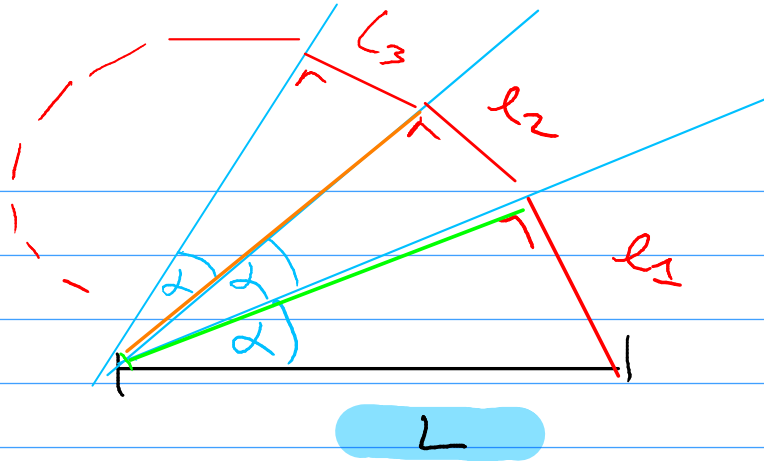
$$\bullet \overline{3,211} = 3,2 + 0,0\overline{11} = 3,2 + \frac{1}{10} \cdot 0.\overline{11}$$

$$= 3,2 + \frac{1}{10} \cdot \frac{11}{99} = \frac{16}{5} + \frac{11}{990}$$

$$\bullet \overline{3,211} = 3 + 0,\overline{211} = 3 + \frac{211}{999}$$

$$\bullet 0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1.$$

(3)



Que vaut $l_1 + l_2 + l_3 + \dots$

$$l_1 = L \cdot \sin \alpha, \quad l_2 = \underline{L \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha}$$

$$l_3 = \underline{\cos^2 \alpha \cdot L \cdot \sin \alpha}$$

$$\text{Donc, } P = L \cdot \sin \alpha + L \sin \alpha \cos \alpha + L \sin \alpha \cos^2 \alpha + \dots + L \sin \alpha \cos^n \alpha$$

$$= L \sin \alpha (1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^3 \alpha + \dots)$$

$$= L \sin \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos^{n+1} \alpha}{1 - \cos \alpha} = \underline{\underline{\frac{L \cdot \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}}}$$

§2.5. Exemples et révision

① Résoudre $|2ux| > x - 4u$

$$D_{\text{def}} = \begin{cases} \mathbb{R} - & \text{si } u < 0 \\ \mathbb{R} & \text{si } u = 0 \\ \mathbb{R}_+ & \text{si } u > 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \iff \begin{cases} x - 4u < 0 & (1a) \\ \text{ou} \\ 2ux > (x - 4u)^2 & (1b) \end{cases}$$

$$(1a) \quad x - 4u < 0 \Leftrightarrow x < 4u$$

$$\underline{S_{1a}} =]-\infty, 4u[\cap D_{def}$$

$$= \begin{cases}]-\infty, 4u[& \text{si } u \leq 0 \\ [0, 4u[& \text{si } u > 0 \end{cases}$$

$$(1b) \quad 2ux > (x - 4u)^2$$

$$\Leftrightarrow 0 > x^2 - 8xu + 16u^2 - 2ux$$

$$\Leftrightarrow 0 > x^2 - 10ux + 16u^2 = (x - 2u)(x - 8u)$$

$$\Leftrightarrow x \in \begin{cases}]8u, 2u[& \text{si } u < 0 \\ \emptyset =]0, 0[& \text{si } u = 0 \\]2u, 8u[& \text{si } u > 0 \end{cases}$$

$$S_{1b} = \begin{cases}]8u, 2u[& \text{si } u < 0 \\ \emptyset & \text{si } u = 0 \\]2u, 8u[& \text{si } u > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{S = S_{1a} \cup S_{1b}}$$

$$= \begin{cases}]-\infty, 2u[& u < 0 \\ \mathbb{R}^* & u = 0 \\ [0, 8u[& u > 0 \end{cases}$$



Astuce : test

$$u = -1: \quad \sqrt{-2x} > x + 9$$

test avec $s = 3 - \infty, -2\}$ ✓

2. Utiliser la définition pour montrer que

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{u}{u^2 + 1}} = 0$$

$$\left| \sqrt{\frac{u}{u^2 + 1}} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{pour } \underline{\varepsilon > 0} \text{ donné}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{u}{u^2 + 1}} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon > 0 \\ \text{et} \\ \frac{u}{u^2 + 1} < \varepsilon^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u < \varepsilon^2(u^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 0 < u^2 \varepsilon^2 - u + \varepsilon^2$$

$$\text{si } u > \frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon^4}}{2\varepsilon^2} = u_+$$

Dans, pour $\varepsilon > \text{donné}$,

$$N = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon^4 > 1/4 \\ \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon^4}}{2\varepsilon^2} \right\rfloor + 1 & \text{si } \varepsilon^4 \leq 1/4 \end{cases}$$

Chap 3: Fonctions réelles à une variable

§3.1. Introduction:

Def: Une fonction, f , est un objet mathématique qui associe un nombre y à un nombre x .
On note pour une fonction réelle

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

- l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ auxquels f associe un nombre y est appelé l'ensemble de définition de f , ou D_f .
- l'ensemble des $y \in \mathbb{R}$ t.q. $\exists x \in D_f$ tel que $y = f(x)$ est l'image de f ou $\text{Im}(f)$.
- le graphe de f est l'ensemble

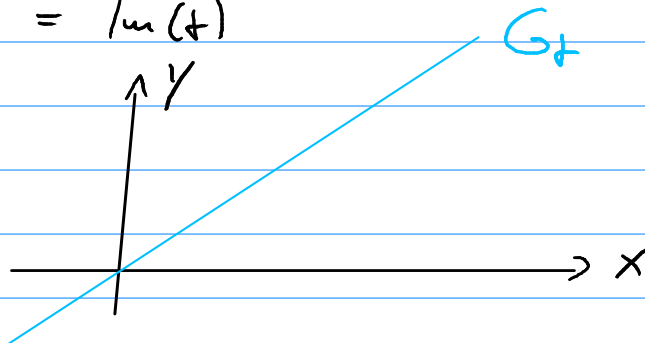
$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f \text{ et } y = f(x)\}$$

Exemples:

①

$$f(x) = x$$

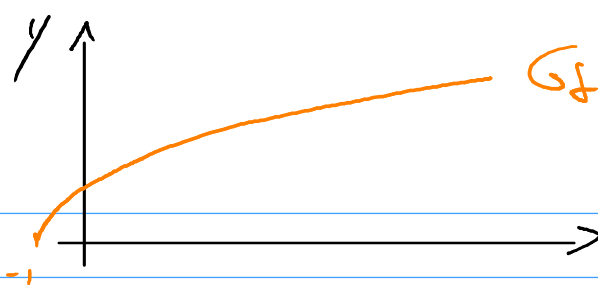
$$D_f = \mathbb{R} = \text{Im}(f)$$



②

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

$$D_{\text{def}} = [-1, \infty[, \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$$



③ $g = \sin(x)$, $h(x) = \cos(x)$ et autres fonctions trigonométriques

④ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = f(x)$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Determiner Im(f) : 1a) $\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = y$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = y(x-1)^2 = y(x^2 - 2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2(1-y) + x(2y-2) - y = 0$$

possible ssi $\Delta \geq 0$ et $y \neq 1$

$$\Leftrightarrow (2(y-1))^2 + 4y(1-y) \geq 0$$

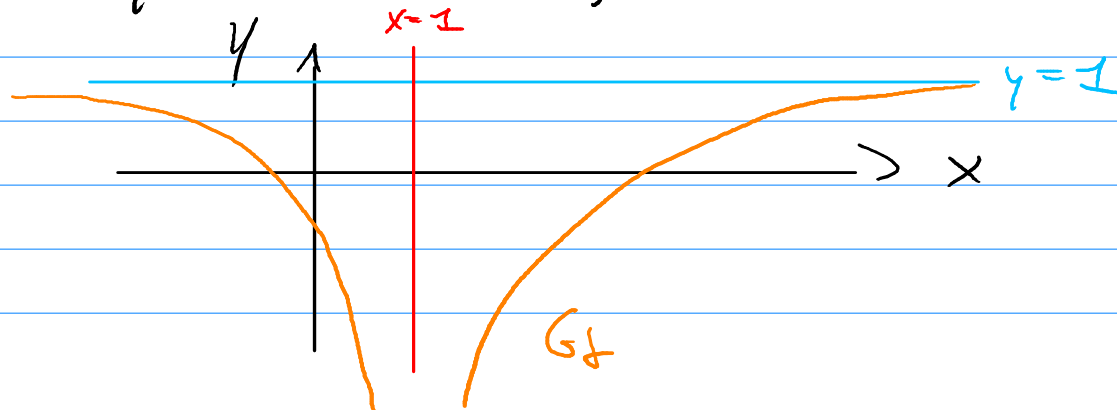
$$\Leftrightarrow 2(1-y)(2(1-y) + 2y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4(1-y) \geq 0 \Leftrightarrow y \in]-\infty, 1[$$

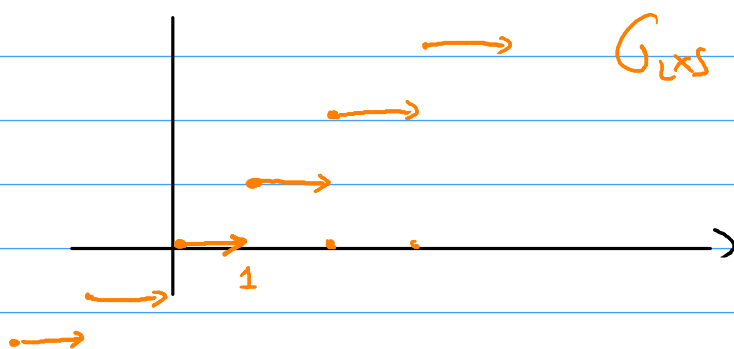
2b) $\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = y$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{(x-1)^2} = y = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2}$$

$$y = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$$

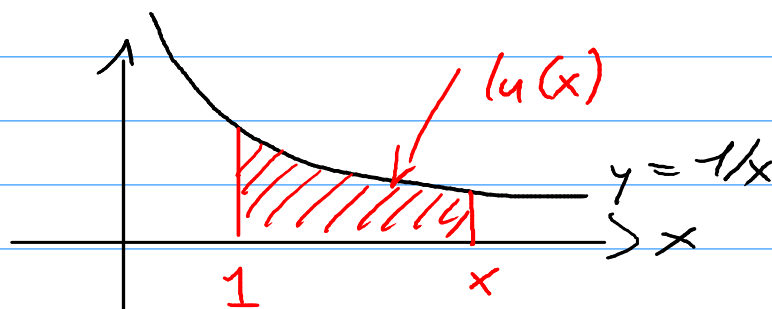


⑤ $f(x) = E(x) = \lfloor x \rfloor$
 $D_f = \mathbb{R}$, $\text{Im}(f) = \mathbb{Z}$



⑥ $\| \cdot \| : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \longmapsto \sqrt{x^2 + y^2}$
 $\text{Im}_{\| \cdot \|} = \mathbb{R}_+$, $D_{\| \cdot \|} = \mathbb{R}^2$

⑦ $x \longmapsto$ surface entre $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$
 et les verticales à $x=1$ et x :



Def: Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que
 D_f est symétrique ssi $x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f$.
 f est dite paire ssi D_f est symétrique
 et $f(x) = f(-x)$
 f est dite impair ssi D_f est symétrique
 et $f(x) = -f(-x)$

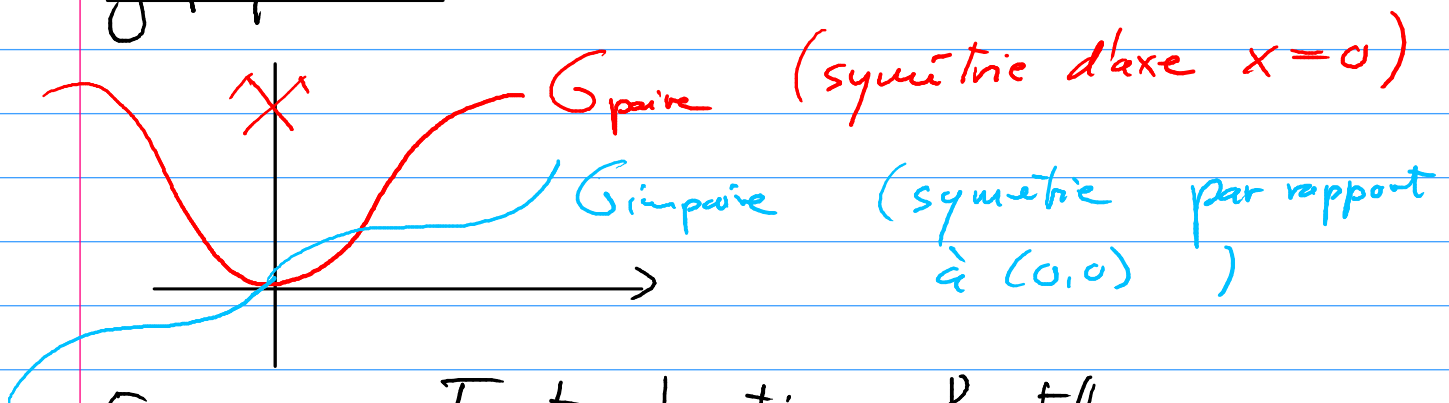
Exemples: ① $x \mapsto |x|$ est paire.

② $x \mapsto \sin(x)$ est impaire

③ $x \mapsto \sin(x)$ est impair, alors
 $x \mapsto \cos(x)$ est paire

④ $x \mapsto Lx$ est ni paire ni impaire

graphiquement:



Exercices: Toute fonction f telle que D_f est symétrique, alors $f = f_+ + f_-$ où f_+ est paire et f_- est impaire.

Def: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite périodique si
 $\exists T > 0$ t.q. $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in D_f$.
La période de f est le plus petit $T > 0$ t.q.
 $\forall x \in D_f$, $f(x+T) = f(x)$.

Exemple: $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

ou $f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$ (trigonométrie)

$D_f = \mathbb{R}$ qui est symétrique.

f est impaire, car $\sin(x)$ l'est.

f est périodique (p.ex. $T = 2\pi$) de période π .

Def: f est dite croissante ssi

$$x, x' \in D_f \text{ et } x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$$

f est dite strictement croissante ssi

$$x, x' \in D_f \text{ et } x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$$

f est décroissante ssi

$$x, x' \in D_f \text{ et } x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$$

Exemple: résoudre $\sqrt[3]{1-x^2} + x > 1$ ①

$$D_{\text{def}} = \mathbb{R}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-x^2} > 1-x$$

($x \rightarrow x^3$ est strictement croissant)

$$\Leftrightarrow 1-x^2 > (1-x)^3$$

$$\Leftrightarrow 1-x^2 > 1-3x+3x^2-x^3$$

$$\Leftrightarrow x^3-4x^2+3x > 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2-4x+3) > 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x-3) > 0$$

Tableau:

		0	1	3				
x		-	0	+	+			
$x-1$		-	-	0	+			
$x-3$		-	-	-	0	+		
$\varepsilon(x)$		-	0	+	0	-	0	+

$$S = \underline{]0, 1[\cup]3, \infty[}$$

Def: Soient $g, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

si $\text{Im}(f) \subset D_g$ on pose

$$g \circ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

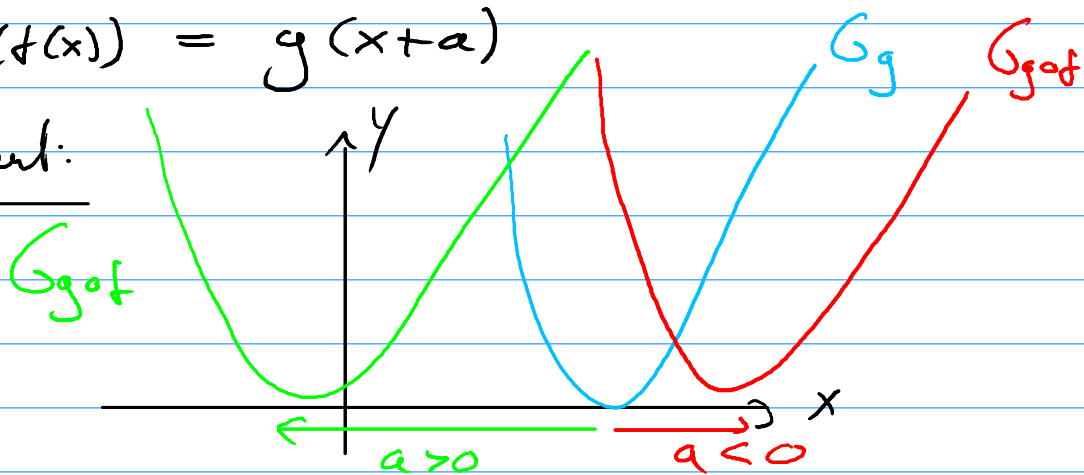
$$x \longmapsto g(f(x))$$

et la composition de g avec f .

Exemple: $f(x) = x + a$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

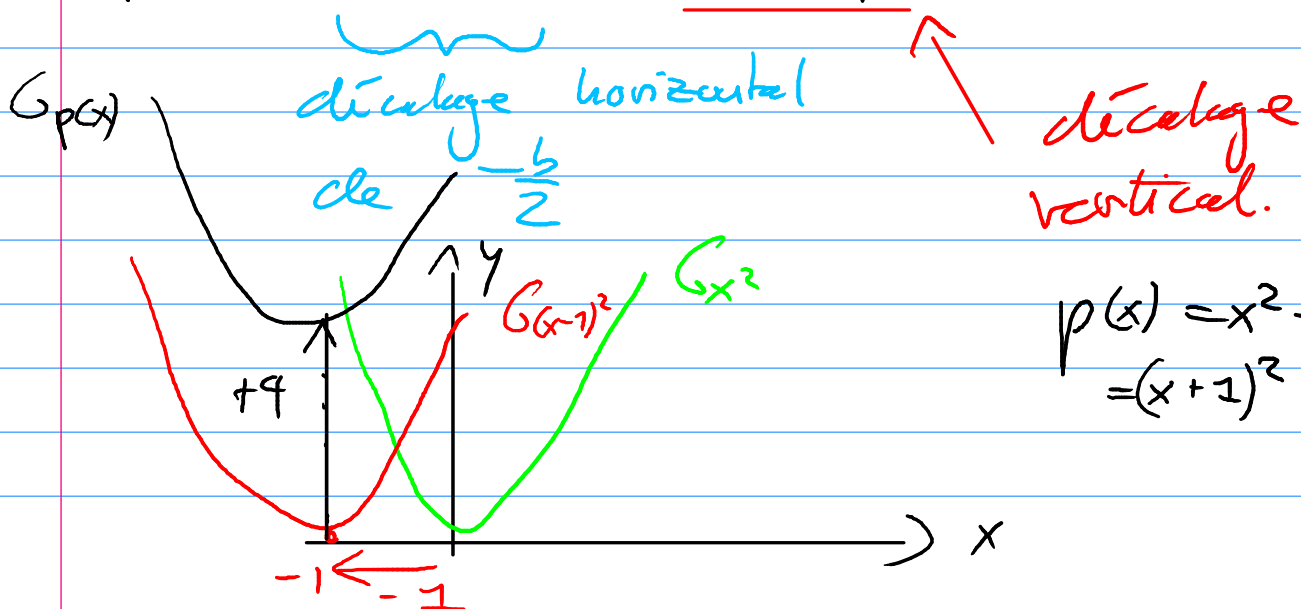
$$\text{alors } g(f(x)) = g(x + a)$$

graphiquement:



Exemple: $p(x) = x^2 + bx + c$

$$p(x) = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}$$



$$p(x) = x^2 + 2x + 5 \\ = (x+1)^2 + 4$$

Def: Une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite majorée si $\exists M \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall x \in D_f$

$$f(x) \leq M$$

f est dite minorée si $\exists m \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall x \in D_f$

$$f(x) \geq m.$$

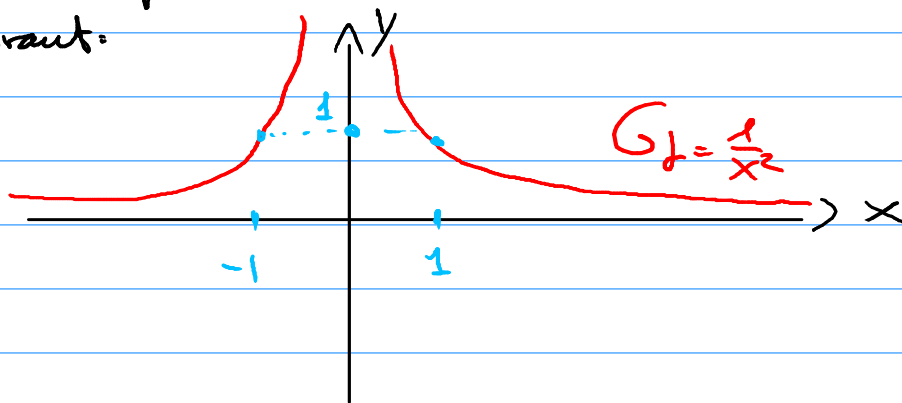
Exemples: ① $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $D_f = \mathbb{R}$,

$\text{Im}(f) =]0, 1[$. On peut prendre pour

$$M = 1, 2, 3, \pi, e, \sqrt{15}, \dots$$

$$m = 0, -1, -2, -157, 13, \dots$$

② $f(x) = \frac{1}{x^2}$, clairement, 0 est un minorant pour f , par contre, f ne possède pas de majorant.



§ 3.2. Limite d'une fonction réelle

Def: Une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite définie au voisinage de l'infini si

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.q. } [M, \infty[\subset D_f.$$

f est dite définie au voisinage de moins l'infini

$$\text{ssi } \exists m \in \mathbb{R} \text{ t.q. }]-\infty, m] \subset D_f$$

Exemples: ① $f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R}^*$. On

a $[1, +\infty[$, $]-\infty, -\frac{1}{2}] \subset D_f$, donc

f est définie au voisinage de $\pm\infty$.

(d.v. ∞ ou d.v. $-\infty$)

② $f(x) = \tan(x)$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\tan(x)$ n'est pas d.v. $\pm\infty$

Def: la limite d'une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d.v. ∞
égale $\ell \in \mathbb{R}$, et on note $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$,
ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X_\varepsilon \text{ d.q. } x \geq X_\varepsilon \Rightarrow |\ell - f(x)| < \varepsilon$$
$$x \leq -X_\varepsilon \Rightarrow |\ell - f(x)| < \varepsilon$$

Exemples: ① $f(x) = \frac{1}{x}$, montrons que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$D_f = \mathbb{R}^*$ et $f(x)$ d.v. ∞ .

Candidat pour $\ell = 0$. Vérifions:

$$\text{soit } \varepsilon > 0. \quad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow_{x > 0} \frac{1}{x} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}. \quad \text{On peut prendre } X_0 = \frac{1}{\varepsilon} + 1$$

$$\text{Donc, } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$\left(\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow_{x < 0} -\frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow -x > \frac{1}{\varepsilon} \right.$$
$$\Leftrightarrow x < -\frac{1}{\varepsilon} \text{ et donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \left. \right).$$

Thm: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d.v. ∞ . On a équivalence entre les affirmations:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$

2) si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$$

Exemple: Montrons que $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$ n'existe pas.

Considérons $a_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ et $b_n = \pi + 2n\pi$

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

Mais $\sin(a_n) = 1$ et $\sin(b_n) = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(a_n) = 1 \neq 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(b_n)$

Donc, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$ n'existe pas.

La seule fonction périodique f.q. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existe est $f(x) = \text{cte } \forall x \in \mathbb{R}$.

Déf: On dit que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diverge vers ∞

et on note $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ssi

$\forall B > 0, \exists x_B$ l.q. $x \geq x_B \Rightarrow f(x) \geq B$

$\forall B < 0, x \geq x_B \Rightarrow f(x) \leq B$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ssi}$$

$$\forall B > 0 \quad \exists x_B \text{ t.q. } x \leq x_B \Rightarrow f(x) \geq B$$

$$\forall B < 0 \quad \exists x_B \text{ t.q. } x \leq x_B \Rightarrow f(x) \leq B$$

Exemple: montrons $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty$

$$\text{Soit } B > 0 : x^2 \geq B \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{B}$$

$$\Leftrightarrow -x \geq \sqrt{B} \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{B}$$

$x \in \mathbb{R}_-$

On choisit $x_B = -\sqrt{B}$ (ou $-\sqrt{B}-1, \dots$)

Puisque x_B existe pour tout choix de $B > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty.$$

Règles de calcul: Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d.v. ∞
supposons que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$.

Alors:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = |a|$ (sans réciproque!)
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{a}{b}$ si $g(x) \neq 0$ d.v. ∞ et si $b \neq 0$

Supposons $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$. Alors

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = \infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot g(x) = \text{sgn}(a) \cdot \infty \quad (a \neq 0)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Si $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d.v. ∞ et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$

alors

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = \infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = \infty$$

Attention ! il existe des cas indéterminés :

soient $f, g, h, k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d.v. ∞ .

Supposons que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} k(x)$$

alors, $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x))$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot h(x)$,

$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{k(x)}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ sont en général indéterminés. (il faut des infos supplémentaires)

Exemple: Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} + x - 1)$

C'est du type " $\infty - \infty$ "

On multiplie par l'expression conjuguée:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} + x - (\cancel{x^2} - 2x + 1)}{\sqrt{x^2+x} - (x-1)}$$

(multiplier par le conjugué)

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 1}{\sqrt{x^2+x} - (x-1)}$$

(diviser par x)

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(\sqrt{x^2+x}) - \frac{1}{x}(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{-\sqrt{\frac{1}{x^2}x^2 + \frac{1}{x^2}x} - 1 + \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 + \frac{1}{x}} = \frac{3 - 0}{-1 - 1 + 0} = -\frac{3}{2}$$

Exemple:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

$$= \begin{cases} \infty \cdot \text{sgn}(a_n) \text{sgn}(b_m) & \text{si } n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n < m \end{cases}$$

Donc,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^{20} + 9x^{19} + 187x^2}{-7x^{18} + 3x^4 + 1} = -\infty$$

Thm des gendarmes: Soient $d, f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

d.v. ∞ . Supposons que

$$\bullet \exists M \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x \geq M \quad g(x) \leq f(x) \leq d(x)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} d(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \ell$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$$

preuve: supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

par le critère des suites, $\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n)$

$$\text{et } g(a_n) \leq f(a_n) \leq d(a_n).$$

Par le thm des gendarmes pour les suites,

$$\text{on a } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \ell.$$

Par le critère des suites, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell \quad \square$.

Exemple: $f(x) = \frac{x}{\varepsilon^2(\lceil x \rceil)} = \frac{x}{\lceil x \rceil^2}$

on remarque que

$$\lceil x \rceil - 1 \leq \lceil x \rceil \leq \lceil x \rceil$$

$$\Leftrightarrow (\lceil x \rceil - 1)^2 \leq \lceil x \rceil^2 \leq |x|$$

$$x > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\lceil x \rceil^2} \leq \frac{1}{(\lceil x \rceil - 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x} \leq \frac{x}{\lceil x \rceil^2} \leq \frac{x}{(\lceil x \rceil - 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{\lceil x \rceil^2} \leq \frac{x}{x - 2\lceil x \rceil + 1}$$

$$\underbrace{g(x)} \leq \underbrace{f(x)} \leq \underbrace{d(x)}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{\lfloor |x| \rfloor^2} \leq \frac{1}{1 - \frac{2}{|x|} + \frac{1}{x}}$$

$\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$
 $\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$

par les gendarmes, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\lfloor |x| \rfloor^2} = 1$.

Corollaire: Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d.v. et si $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = 0$
 alors $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

preuve: Clairement, $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$
 et on applique les gendarmes □

⚠ si $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = |a| \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$

Thm du gendarme: Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d.v.

Si $\exists M > 0$ d.g. $x \geq M \Rightarrow f(x) \geq g(x)$

et $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$.

Alors $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Thm ("O x borné"): Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d.v.

Supposons que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ et

$|g(x)| \leq B$ si $x \geq x_B$.

Alors, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot g(x) = 0$.

preuve: pour $x \geq x_B$

$$0 \leq |f(x)| |g(x)| \leq |f(x)| B$$

par le thm des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)g(x)| = 0$
et donc $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot g(x) = 0$ $\square$.

Exemple: Calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}$

On a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ et $|\sin(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}$ est du type "0 x borné"
et égale 0.

Thm ("x loin de 0"): soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

d.v. ∞ . Supposons que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ et

$\exists m, x_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $x \geq x_0 \Rightarrow g(x) \geq m > 0$.

Alors $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \cdot f(x) = \infty$.

Contre-exemple: $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

Clairement, $g(x)$ n'est pas "loin de 0".

$\nexists m > 0$ t.q. $\forall x, g(x) \geq m > 0$.

Et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot g(x) = 1 \neq \infty$.

Exemple: Calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \sin(x)}{(\cos(x)-2)(x+\sqrt{x^2+1})}$

On calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(x)}{(\cos(x)-2)(1-\sqrt{x^2+1})}$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(x)}{\cos(x)-2} \cdot \frac{1}{1-\sqrt{x^2+1}} = 0$$

$\xrightarrow{\text{borné, car } \cos(x)-2 \text{ est "loin de 0"}}$ $\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$

Exemple: Calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 + x^2 \sin(x)$

On réécrit $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (2 + \sin(x))$

$\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \xrightarrow{\text{donc "loin de 0"}}$

On applique le thm précédent et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 + x^2 \sin(x) = \infty.$$

Thm (" ∞ + borné "): Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
d.v. $\Rightarrow$, d.q. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ et
 $\exists x_0$ d.q. $x \geq x_0 \Rightarrow g(x)$ est bornée.
Alors, $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = \infty$.

Exemple: $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sin(x)) = \infty$

Remarque: Tous ces théorèmes possèdent des analogues pour $x \rightarrow -\infty$.

§ 3.3. Limites de fonctions en $x_0 \in \mathbb{R}$

Exemple introductif: Considérons

$$g(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}, \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

On remarque que

$$g(x) = \frac{x^2(x-2)}{x-2} = x^2 \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4.$$

Situation similaire: $g(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad D_g = \mathbb{R}^*$

M. Dubois va montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$.

Def. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Un voisinage épointé de x_0 est un voisinage de x_0 , privé de x_0 .

Exemple: $]2, 10[\cup]10, 12[$ est un voisinage épointé de 10. ($]2, 12[\setminus \{10\}$)

Def: Une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite définie sur un voisinage épointé de x_0 ,
et on note d.v. x_0 , ssi $\exists \delta > 0$
t.q. $\exists x_0 - \delta, x_0 + \delta [\setminus \{x_0\} \subset D_f$

Exemples: $\frac{\sin(x)}{x}$, $\frac{\cos(x)}{x}$ sont des fonctions
d.v. 0

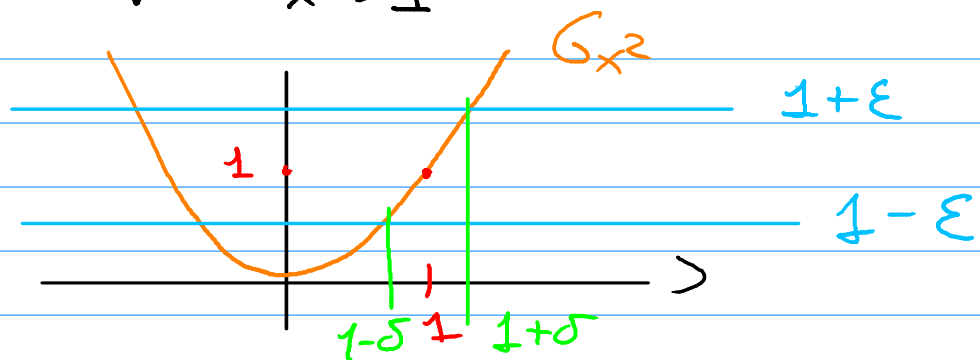
Def: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d.v. x_0 . On dit que la
limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 égale ℓ
et on note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.q. } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Exemple: $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$

$D_f = \mathbb{R}$, donc f d.v. 1

On devine que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$. Graphiquement,



On devine graphiquement que $\delta = \sqrt{1+\varepsilon} - 1$

Vérifions:

$$\text{si } 0 < |x-1| < \delta$$

$$\Rightarrow |x-1| < \underbrace{|\sqrt{1+\varepsilon} - 1|}_{\delta \text{ choisi}}$$

$$\Rightarrow |x^2 - 1| = |x-1||x+1|$$

$$< (|\sqrt{1+\varepsilon} - 1|)(2+\delta) \quad (\text{car, } 2+\delta \geq |x+1|)$$

$$\Leftrightarrow 2+\delta \geq x+1$$

$$\text{ou } -2-\delta \leq x+1$$

$$\Leftrightarrow \delta \geq x-1 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow |x^2 - 1| < (|\sqrt{1+\varepsilon} - 1|)(|\sqrt{1+\varepsilon} + 1|)$$

$$= 1+\varepsilon - 1 = \varepsilon$$

$$\text{On a donc } 0 < |x-1| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - e| < \varepsilon \quad \text{avec}$$

$$\delta = \sqrt{1+\varepsilon} - 1$$

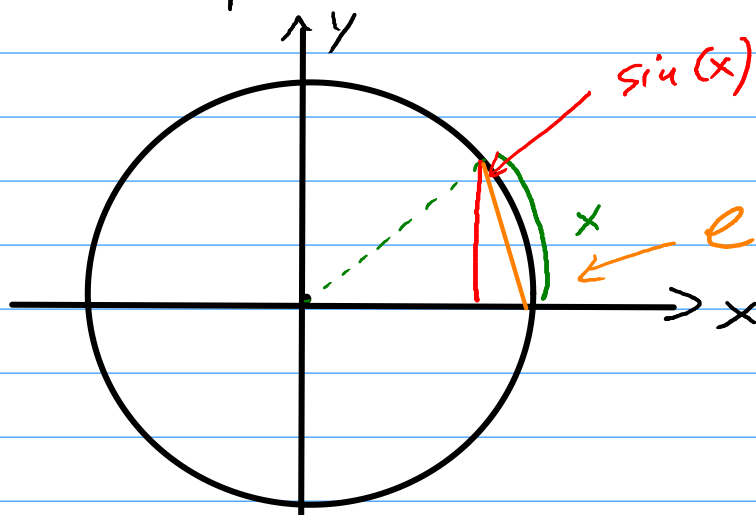
On a ainsi vérifié que $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$.

Exemple: $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$, $D_f = \mathbb{R}$

donc f est d.v.0. À montrer:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0.$$

On pose $\varepsilon > 0$:



On a

$$\sin(x) < e < x$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|\sin(x)| < |x|$$

Si on choisit $\delta = \varepsilon$ ou

$$0 < |x| < \delta \quad \text{et}$$

$$0 \leq |\sin(x)| < |x| < \delta = \varepsilon$$

$$\text{Donc, } |\sin(x) - 0| < \varepsilon$$

On a donc par définition que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0.$$

Exemple: $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 0$, $I_f = \mathbb{R}$

donc, $f(x)$ est d.v. 0.

Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$.

Soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \varepsilon &> |1 - \cos(x)| = 1 - \cos(x) \\ &= 1 - \cos\left(\frac{x}{2} \cdot 2\right) = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

Donc, si $\left|\frac{x}{2}\right| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$, alors

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} > \sin\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{et donc,}$$

$$\frac{\varepsilon}{2} > \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \varepsilon > 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

On choisit alors $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$ et

$$0 < |x| < \sqrt{2\varepsilon} \Rightarrow |\cos(x) - 1| < \varepsilon$$

Thm. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d.v. x_0 . Les affirmations suivantes sont équivalentes:

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$, dès que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$
et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \neq x_0$

Exemple. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ n'existe pas.

Preons $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

$b_n = 1 - \frac{1}{n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$

Mais: $f(a_n) = (a_n^2 + 1) = (1 + \frac{1}{n})^2 + 1 = 2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underline{2}$

$f(b_n) = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underline{1}$

Par le thm précédent, cela est équivalent à dire que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas.

Def: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur $]x_0, x_0 + \delta[$
On écrit $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ ($]x_0 - \delta, x_0[$)
ssi

($\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$)

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.q. $0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

($\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.q. $0 > x - x_0 > -\delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$)

Exemple: $f(x) = E(x(2-x))$, $x_0 = 1$

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x)$

• Ecrivons $x = 1 + \delta$:

$$f(x) = f(1+\delta) = E((1+\delta)(2-1-\delta)) = E(1-\delta^2) = 0$$

$$\text{si } \delta < 1. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0.$$

• Ecrivons $x = 1 - \delta$

$$f(x) = f(1-\delta) = E((1-\delta)(2-1+\delta)) = E(1-\delta^2) = 0$$

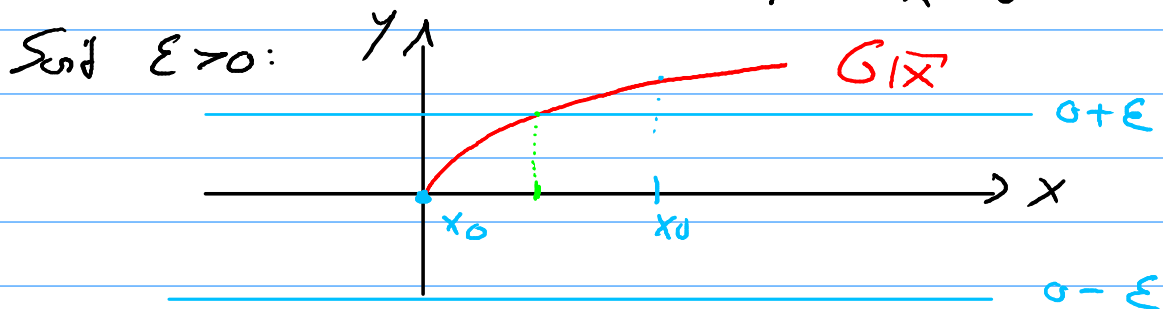
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0.$$

Donc, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, mais

$$f(1) = E(1(2-1)) = E(1^2) = 1$$

Exemple: $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ pour $x_0 \geq 0$.

1) $x_0 = 0$: on veut montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$



On choisit $\delta = \varepsilon^2$.

si $0 < x - 0 < \delta$, alors

$$0 < x < \varepsilon^2$$

$$\Leftrightarrow 0 < \sqrt{x} < \varepsilon \Rightarrow |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

On a donc vérifié que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$.

$2 x_0 > 0$: Soit $\varepsilon > 0$. On prend $\delta = \bar{x}_0 \varepsilon$.

Si $0 < |x_0 - x| < \delta$, alors

$$|x - \bar{x}_0| = \frac{|x - x_0| |x + \bar{x}_0|}{|x + \bar{x}_0|} = \frac{|x - x_0|}{|x + \bar{x}_0|}$$

$$< \frac{|x - x_0|}{\bar{x}_0} < \frac{\delta}{\bar{x}_0} = \varepsilon$$

Donc, $\lim_{x \rightarrow x_0} x = \bar{x}_0$

Remarque: si on prend $\delta' = \frac{\delta}{2} = \frac{\bar{x}_0 \varepsilon}{2}$

Remarque: Toute règle de calcul, ainsi que les cas indéterminés pour $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ restent valables pour $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

§ 3.4. IPE ("infinitement petit équivalent")

Déf: Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d.v. x_0 . On dit que f est infinitement petit équivalent (IPE) à g autour de x_0 ssi

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

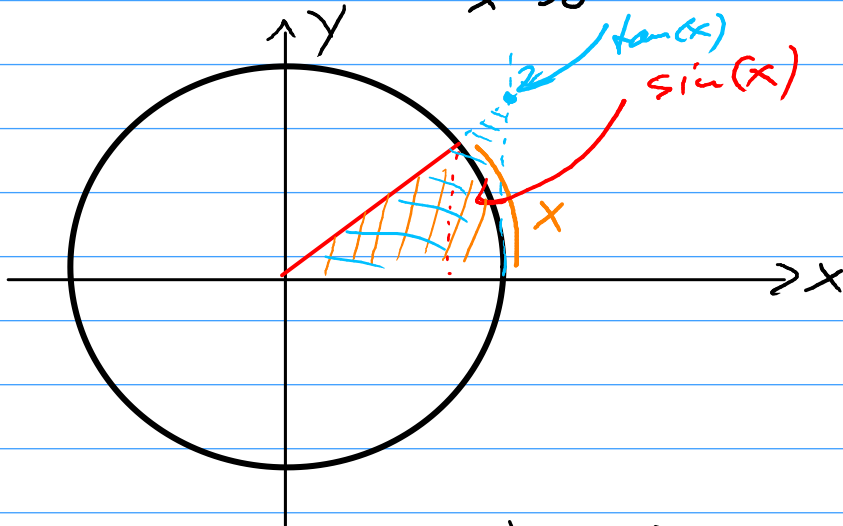
$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 1$$

On note $f \sim_{x_0} g$

Exemple: $\sin(x) \sim_0 x$ en effet,

• $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} x$

• rate à calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$



$$\sin(x) < x < \tan(x)$$

$\Rightarrow$
 $\sin(x) \neq 0$
 $x \neq 0$
d.v. 0

$$\underbrace{1}_{g(x)} < \frac{x}{\sin(x)} < \underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{d(x)}$$

Par le thm des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Exemple: $1 - \cos(x) \sim_0 \frac{x^2}{2}$

en effet, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos(x)) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2}$

et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})}{\frac{x^2}{2}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(\frac{x}{2})}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}$$

$$= 1.$$

Thm: Soient $f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d.v. x_0 .

Supposons que $f_1 \sim_{x_0} g_1$ et $f_2 \sim_{x_0} g_2$.

Alors

$$f_1 \cdot f_2 \sim_{x_0} g_1 \cdot g_2$$

preuve: cela est une réécriture de la règle du produit:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1 \cdot f_2}{g_1 \cdot g_2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1}{g_1} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2}{g_2} = 1 \cdot 1 = 1$$

D.

Exemple:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin(x)\cos(x) - 2\sin(x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin(x)(\cos(x) - 1)}{x \cdot x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos(x) - 1)}{\frac{x^2}{2}} = \underline{\underline{-1}}$$

§ 3.5. Continuité

Def: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un
voisinage de x_0 (d.v. x_0). On dit que
 f est continue en x_0 ssi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

(Contre-) exemples:

① $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, $x_0 = 0$. f est d.v. x_0 .
Par définition, $f(x)$ n'est pas continue en x_0 .
Par les IPE on sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

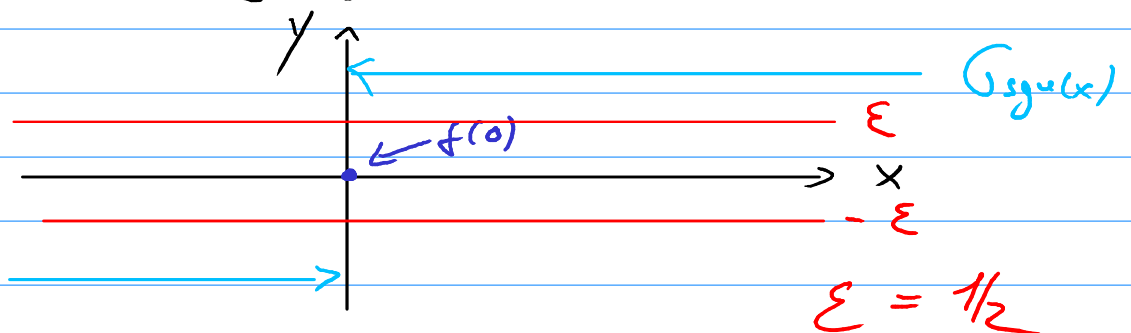
On pose alors

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$\tilde{f}(x)$ est alors continue en $x_0 = 0$.

On appelle $\tilde{f}(x)$ l'extension de $f(x)$ en x_0
par continuité.

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



$$\text{si } \varepsilon = \frac{1}{2}, \quad f^{-1}(\mathbb{J} - \varepsilon, \varepsilon) = \{0\}$$

Donc, $\forall \delta > 0$ d.q. $\exists -\delta, 0[\cup]0, \delta[\subset]-\varepsilon, \varepsilon[$

Donc, $\forall \delta > 0$ d.q. $0 < |x-0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \frac{1}{2}$

Donc, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0) = 0$.

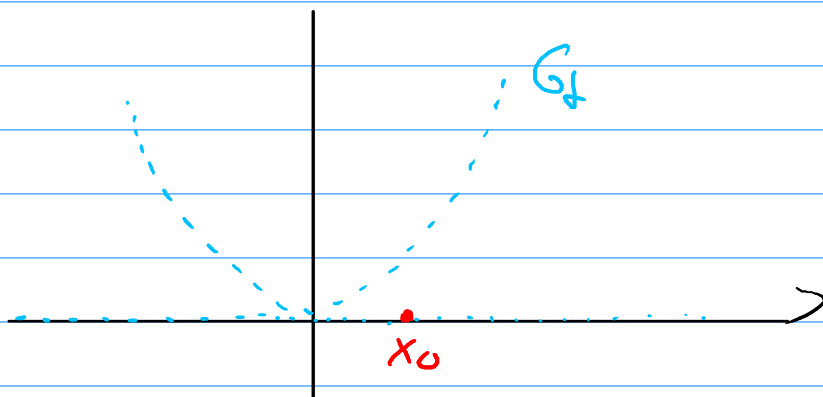
Donc, $f(x)$ est discontinue en $x_0=0$

On peut reformuler la continuité :

Def: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en x_0 ssi f d.r. x_0

et $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ d.q. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Exemple: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$



la fonction $f(x)$ est continue en $x_0=0$:

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. On a en effet

$$|x - 0| < \sqrt{\varepsilon} (= \delta) \Rightarrow |x^2 - 0| < \varepsilon$$

$\Leftrightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$. Donc, $f(x)$ est continue en $x_0=0$.

Preons $x_0 \neq 0$. Soit $\delta > 0$ et notons que

si $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, alors

$$f(x) \in](x_0 - \delta)^2, (x_0 + \delta)^2[\cup \{0\}$$

$$\text{Si on prend } \delta = \frac{x_0}{2} \quad f(x) \in](\frac{x_0}{2})^2, (\frac{3x_0}{2})^2[\cup \{0\}$$

Cela n'est pas un intervalle $]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$

Donc, $f(x)$ est discontinue en $x_0 \neq 0$.

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue pour tout $x \in I$,
où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, on note

$$f \in C(I)$$

$$\uparrow$$

$$\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continue en } x_0 \in I\}$$

Exemples: ① $\text{id} \in C(\mathbb{R}_+^*)$

② On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$

Montrons la continuité de $\sin(x)$ en $x_0 \neq 0$.

Pour $\varepsilon > 0$,

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| 2 \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right| < \varepsilon$$

$$\Leftarrow \left| 2 \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| < \varepsilon \quad (\text{cond. plus forte})$$

$$\Leftarrow \left| 2 \left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| < \varepsilon \quad (\text{cond. encore plus forte})$$

On peut choisir

$$\delta = \varepsilon$$

③ $\cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, puisque

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Thm: Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continues en x_0 .

Alors $|f|$, $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (si $g(x_0) \neq 0$)
sont toutes continues en x_0 .

preuve: Toutes ces relations sont des conséquences
des thm de la caractérisation par les suites $\square$.

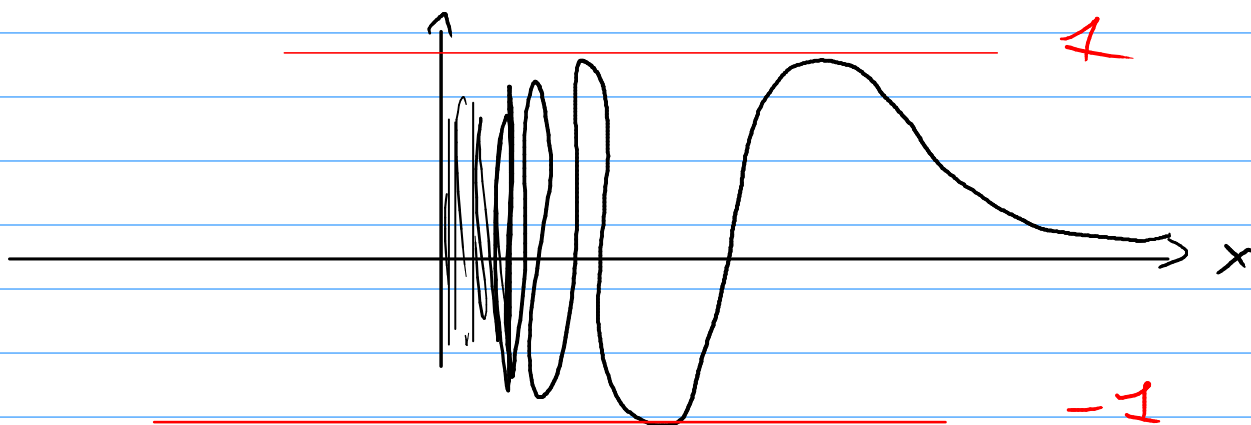
Exemples: $f(x) = \text{cte}$, x , x^2 , x^3 , x^4 ,
 $x^{n+1/2}$, $x^{n/2}$, $x^{n/4}$,

$f(x) = x^4 - 3x^2 + 7$, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ est
continue sur $\mathbb{R}$ d.g. $Q(x) \neq 0$.

$\tan(x)$ (si $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$),
 $\cot(x)$ (si $x \neq n\pi$) sont toutes continues.

contre-exemple:

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si } x \neq 0$$



$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en $x_0 = 0$.
et donc ne possède pas d'extension continue
en x_0 .

Thm: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d.v. x_0 d.g.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d.v. ℓ d.g.

$$\lim_{x \rightarrow \ell} g(x) = k \quad \text{Alors,}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = k$$

preuve: Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{y \rightarrow \ell} g(y) = k$
il existe un $\delta > 0$ d.g.

$$0 < |y - \ell| < \delta \Rightarrow |g(y) - k| < \varepsilon$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, il existe $\delta' > 0$

$$\text{d.g. } 0 < |x - x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x) - \ell| < \delta$$

$$\text{Donc, } 0 < |x - x_0| < \delta' \Rightarrow$$

$$|g(f(x)) - k| < \varepsilon$$

□.

Corollaire: Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d.g.

f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g(f(x))$ est continue en x_0

Exemples: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $\sin(\cos(x))$

$$\sqrt{\sin^2(x)} = |\sin(x)|^{1/2}$$

□.

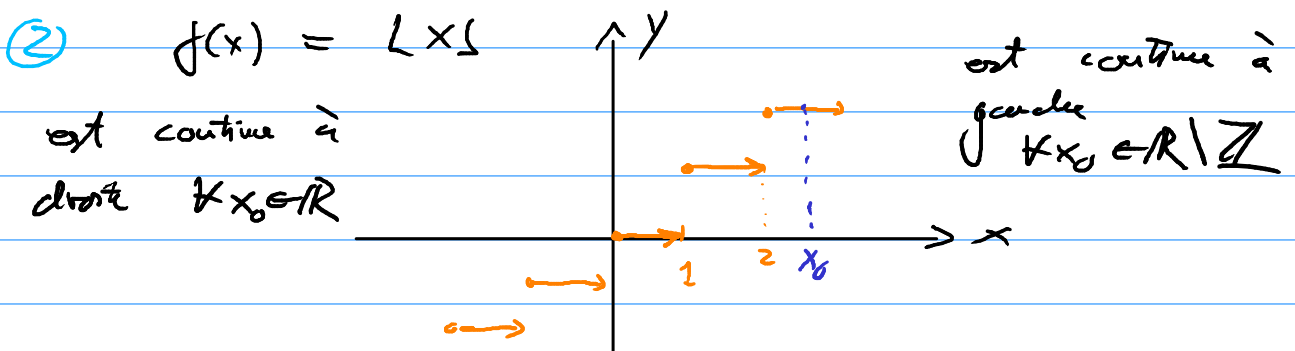
Def: Une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d.v. x_0 à droite
 de x_0 est dite continue à droite de x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ d.q. } x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(à gauche)
 (à gauche)
 ($x_0 - x < \delta$)

Dire qu'une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d.v. x_0 est continue en x_0 est équivalent à
 dire que f est continue et à droite et à gauche de x_0

Exemples: ① $f(x) = \lfloor x \rfloor$, alors f est d.v. à droite de $x_0 = 0$. La continuité à droite a déjà été vérifiée. On écrit $\lfloor x \rfloor \in C(\mathbb{R}_+)$.



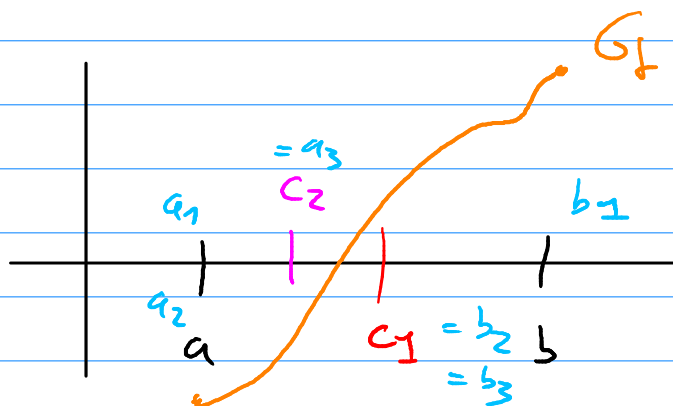
Donc, $\lfloor x \rfloor \in C(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$

Thm: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$
 (continue sur $]a, b[$, continue en a^+ et continue en b^-). Si $f(a) \cdot f(b) < 0$ alors $\exists c \in]a, b[$
 d.q. $f(c) = 0$

preuve (thm de la bisection): On construit deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme suit :

$a_1 := a$, $b_1 := b$. On considère $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$

- si $f(c_1) = 0$ on pose $c = c_1$ et on a prouvé le thm.
- si $f(a_1)f(c_1) < 0$, on pose $a_2 := a_1$ et $b_2 := c_1$
- si $f(c_1)f(b_1) < 0$, on pose $a_2 := c_1$ et $b_2 := b_1$



Supposons que $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ soient constants. On pose $c_n := \frac{a_n + b_n}{2}$

- si $f(c_n) = 0$. On pose $c = c_n$.
- si $f(a_n) \cdot f(c_n) < 0$, alors $a_{n+1} := a_n$
 $b_{n+1} := c_n$.
- si $f(c_n) \cdot f(b_n) < 0$, alors $a_{n+1} := c_n$ et $b_{n+1} := b_n$

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$,

- $a_n \leq a_{n+1} \leq b$
- $b_n \geq b_{n+1} \geq a$
- $|a_n - b_n| = \frac{|a - b|}{2^{n-1}}$

On conclut que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}_*, f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$

$$\begin{aligned} \text{Mais, } 0 &\leq f(c) \cdot f(c) \\ &= f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) \cdot f(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0 \end{aligned}$$

Donc, $f(c) = 0$ □.

Exemple: $p(x) = x^5 - x - 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty.$$

Donc, $\exists a, b \in \mathbb{R}, a < b$ d.q.

$p(a) \cdot p(b) < 0$ et $p(x)$ est continue.

Donc, $\exists c \in]a, b[$ d.q. $p(c) = 0$.

Contre-exemple: $f(x) = x^5 - 1/2$

$f(0) = -1/2, f(1) = 1/2$. f change de signe sur $[0, 1]$. Mais $f(x) \neq 0 \forall x \in [0, 1]$

L'hypothèse de la continuité n'est pas vérifiée par $f(x)$

Corollaire: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si $f(a) \neq f(b)$ et si $y \in [f(a), f(b)]$. Alors $\exists c \in [a, b]$ d.q. $f(c) = y$.

preuve: si $y = f(a)$ ou si $y = f(b)$, on choisit $c = a$ ou $c = b$.

Supposons alors $y \in]f(a), f(b)[$. On pose $g(x) := f(x) - y$. On est ramené à trouver $c \in]a, b[$ s.t. $g(c) = 0$. Mais $g(x)$ est continue, et $g(a) \cdot g(b) < 0$. $\square$.

Corollaire: Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone, alors f est une bijection entre $[a, b]$ et $[f(a), f(b)]$.

Thm: Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $\text{Im}(f)$ est aussi un intervalle fermé, $\text{Im}(f) = [\min\{f(x), x \in [a, b]\}, \max\{f(x), x \in [a, b]\}]$.

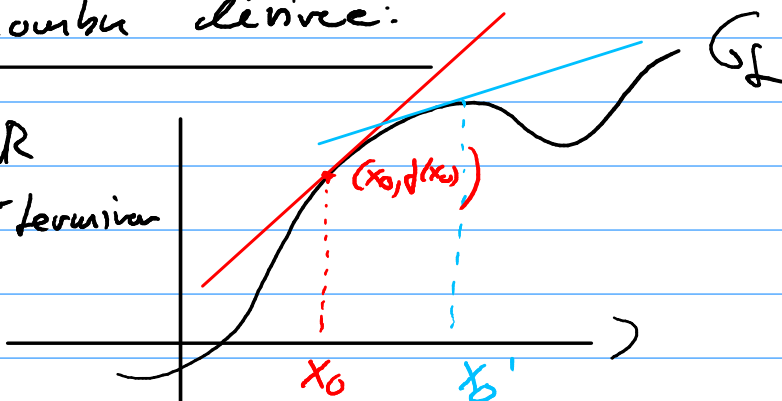
Preuve: voir moodle

$\square$.

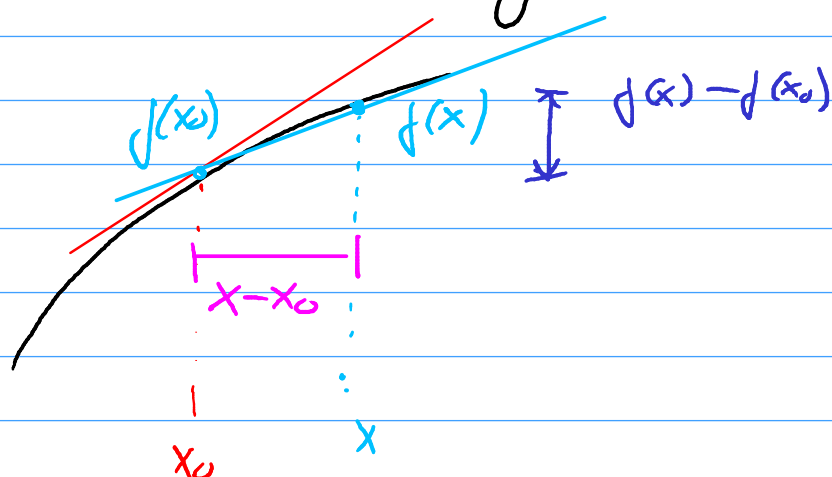
Chapitre 4: Dérivée

§ 4.1. le nombre dérivé:

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
On aimerait déterminer la pente de la tangente à G_f en $(x_0, f(x_0))$



Si on "zoom" sur le graphe :



On pose par définition que

$$\text{nombre dérivé} := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Trois cas possibles:

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ n'existe pas.

p.ex. $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

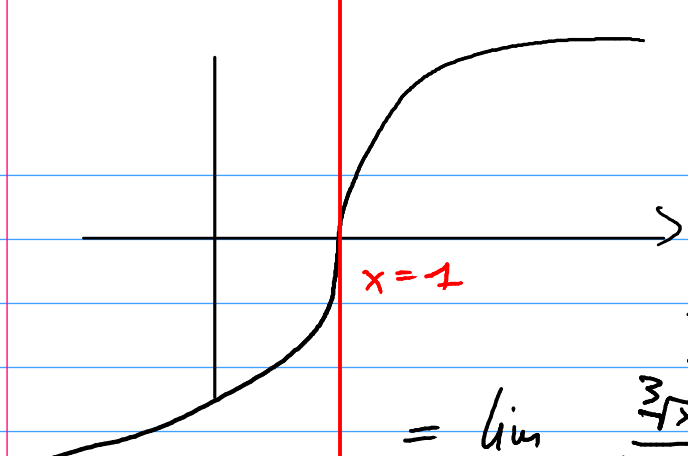
si $x_0 = 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1/x) \cdot x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$$

$f(x)$ ne possède pas de tangente en $x_0 = 0$
(mais $f(x)$ est continue en $x_0 = 0$)

2 cas: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm \infty$

p.ex. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, $x_0 = 1$



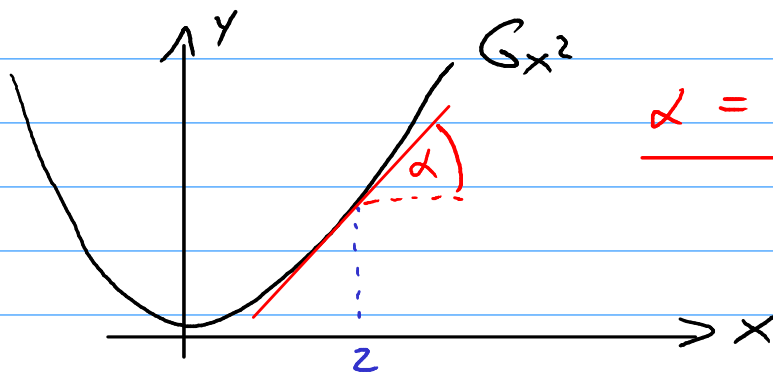
$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{1-1}}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{(\sqrt[3]{x-1})^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt[3]{x-1})^2} = \infty
 \end{aligned}$$

3 cas:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$$

p. ex. $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = 4.$$



$$\alpha = \arctan(4)$$

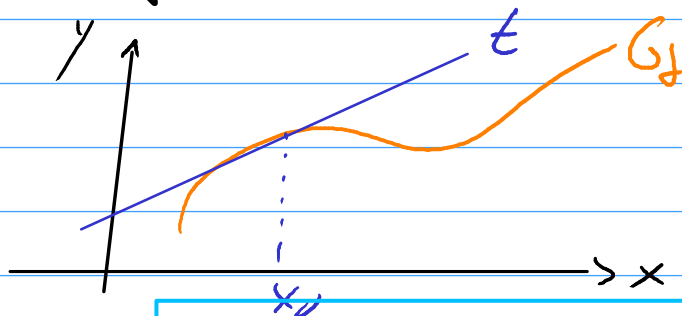
Déf: On dit que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en
 x_0 ssi

• d. v. x_0

• $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$

On dit que ℓ est la dérivée de f en x_0
 et on écrit $f'(x_0) = \ell$

Exemple: Si $f'(x_0) = \ell$ pour une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d.v. x_0 . Alors



$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \ell$$

et donc

$$\begin{aligned} t(x) &= f(x_0) + \ell(x - x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

Exemples: ① Calculer la tangente à G_{x^2} en $x_0 = 1$ et en $x_0 = 2$.

Calculons: • $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 2$

Donc, $t_1(x) = 1^2 + 2(x-1) = 2x - 1$

• $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = 4$

Donc, $t_2(x) = 2^2 + 4(x-2) = 4x - 4$

② Calculer la dérivée de $f(x) = x^2$ pour $x_0 \in \mathbb{R}$

$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{(x-x_0)} = 2x_0$

⚠ Ne faites pas de "limites partielles"

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$

③ Calculons la dérivée de $f(x) = x^3$ en x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + x x_0 + x_0^2)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + x x_0 + x_0^2) = \underline{3x_0^2}$$

Thm: Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0
alors f est continue en x_0

preuve: Si f est dérivable en x_0 , alors par
définition $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$

puisque $\lim_{x \rightarrow x_0} x - x_0 = 0$, on a
 $f(x) - f(x_0) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$. $\square$

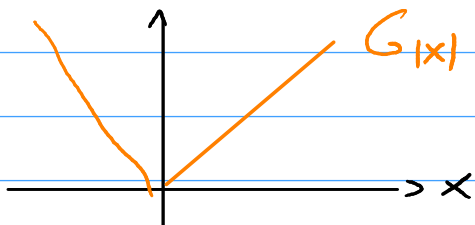
⚠ Attention à la réciproque : une fonction continue
en x_0 n'est pas toujours dérivable en x_0 .

Def: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un voisinage à
droite de x_0 (d.v. x_0^+). On dit que $f(x)$
(gauche) (d.v. x_0^-)
est dérivable à droite de x_0 ssi
(à gauche de x_0)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0^+ \\ (x \rightarrow x_0^-)}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R} \text{ . On note } \ell = f'(x_0^+) \text{ (} \ell = f'(x_0^-) \text{)}$$

Exemple: $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$.

f est d.v. 0, donc d.v. 0^+ et d.v. 0^- . De plus, $|x|$ est continue en $x_0 = 0$.



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn}(x).$$

Cette limite n'existe pas, donc $|x|$ n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

Par contre $\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sgn}(x) = 1$ et

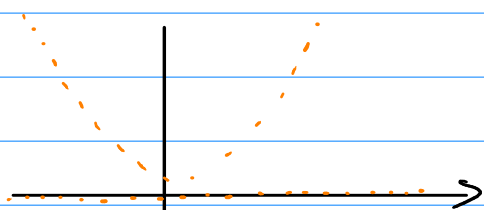
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sgn}(x) = -1$$

Conclusion: $|x|$ est dérivable à gauche et à droite de 0. La dérivée sera respectivement égale à -1 et $+1$.

Défini: Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en x_0 , est-ce que f est continue sur un voisinage de x_0 ?

En général non. Contre-exemple:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



$f'(0) = 0$
Donc f dérivable en 0. f est

continue en 0 mais discontinue sur tout voisinage de 0.

§ 4.2. la fonction dérivée

Def: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Alors la fonction dérivée est donnée par

$$I \ni x \mapsto f'(x)$$

(Notations: $\frac{d}{dx} f(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{df}{dx}(x)$, $f'(x)$)

Exemples: Calculons $\frac{d}{dx} \sin(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0) \cos(h) + \sin(h) \cos(x_0) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0)(\cos(h) - 1) + \sin(h) \cos(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x_0) \frac{\sin(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0) \frac{\cos(h) - 1}{-h^2/2} \frac{-h^2/2}{h} + \cos(x_0) \text{ IPE} \\ &= \cos(x_0) = \frac{d}{dx_0} \sin(x_0) \end{aligned}$$

② $\frac{d}{dx} \cos(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi/2 - x - h) - \sin(\pi/2 - x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-1) \frac{\sin(\pi/2 - x + h) - \sin(\pi/2 - x)}{+h} \end{aligned}$$

$$= (-1) \cos(\pi/2 - x) = -\sin(x) = \frac{d}{dx} \cos(x)$$

Règles de calcul: soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables en x_0

① $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h} &= (f+g)'(x_0) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

② $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(x_0+h) - (f \cdot g)(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

③ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$
si $g(x_0) \neq 0$.

Exemples: ⑦ $f(x) = x$, $f'(x) = 1$.

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2) = \frac{d}{dx}(f \cdot f) \stackrel{(2)}{=} f' \cdot f + f \cdot f' = 2x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^3) = \frac{d}{dx}(x^2 \cdot x) \stackrel{(2)}{=} \left(\frac{d}{dx} x^2\right) \cdot x + x^2 \cdot \left(\frac{d}{dx} x\right)$$

$$= 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$$

$$\bullet \frac{d}{dx}(x^u) = u x^{u-1}, \text{ en effet,}$$

cette formule est vraie pour $u=1,2,3$.

Supposons l'égalité vraie pour u . Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^{u+1}) &= \frac{d}{dx}(x^u \cdot x) \stackrel{(2)}{=} \left(\frac{d}{dx} x^u\right)x + x^u \left(\frac{d}{dx} x\right) \\ &= u x^{u-1} \cdot x + x^u \cdot 1 = (u+1)x^u \quad \checkmark \end{aligned}$$

hyp. réc.

2) Calculons $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^u}\right)$, $u \geq 1$

Remarquons que $\frac{1}{x^u} \cdot x^u = 1$

Donc, $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^u} \cdot x^u\right) = \frac{d}{dx} 1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^u}\right) \cdot x^u + \frac{1}{x^u} \frac{d}{dx}(x^u) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^u}\right) = \frac{-1}{x^u} \left(\frac{1}{x^u} \frac{d}{dx} x^u\right)$$

$$= \frac{-1}{x^u} \left(\frac{1}{x^u} u x^{u-1}\right) = \frac{-u}{x^{u+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} x^{-u} = (-u) x^{-u-1}$$

(analogue à $\frac{d}{dx} x^u = u x^{u-1}$)

3) Qu'en est-il de $\frac{d}{dx} x^{p/q} = \frac{p}{q} x^{p/q-1}$?

En fait, on a ici la dérivée de

$$\frac{d}{dx} (x^{1/q})^p$$

qui est la dérivée d'une composition de fonctions
(fonction $x \mapsto x^{1/q}$ composée avec $y \mapsto y^p$)

Thm: Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telles que f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$

$$\text{Alors, } g(f(x))' \big|_{x=x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

preuve: Posons

$$r(\Delta y) := \left[\frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} - g'(y) \right]$$

On a • $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} r(\Delta y) = g'(y) - g'(y) = 0$

• $g(y + \Delta y) - g(y) = (g'(y) + r(\Delta y)) \Delta y$

Dans, $\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h}$

$$= \frac{g(\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\Delta y} + \overbrace{f(x_0)}^y)) - g(f(x_0))}{h}$$

$$= \frac{(g'(f(x_0)) + r(\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\Delta y})) (\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\Delta y}))}{h}$$

À la limite quand $h \rightarrow 0$

$$\frac{d}{dx_0} g(f(x_0)) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad \square$$

Reprenons le calcul de $\frac{d}{dx} x^{p/q}$:

$$\frac{d}{dx} (x^{1/q})^p = p (x^{1/q})^{p-1} \cdot \frac{d}{dx} x^{1/q}$$

$$\text{mais } \frac{d}{dx} (x^{1/q})^q = \frac{d}{dx} x = 1$$

$$\text{Donc, } 1 = q (x^{1/q})^{q-1} \cdot \frac{d}{dx} (x^{1/q})$$

$$\text{Donc, } \frac{d}{dx} (x^{1/q}) = \frac{1}{q (x^{1/q})^{q-1}}$$

$$= \frac{1}{q} \frac{1}{x^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{x^{1 - 1/q}}$$

$$= \frac{1}{q} x^{1/q - 1}$$

$$\text{Donc, } \frac{d}{dx} x^{p/q} = \frac{p}{q} x^{p/q - 1}$$

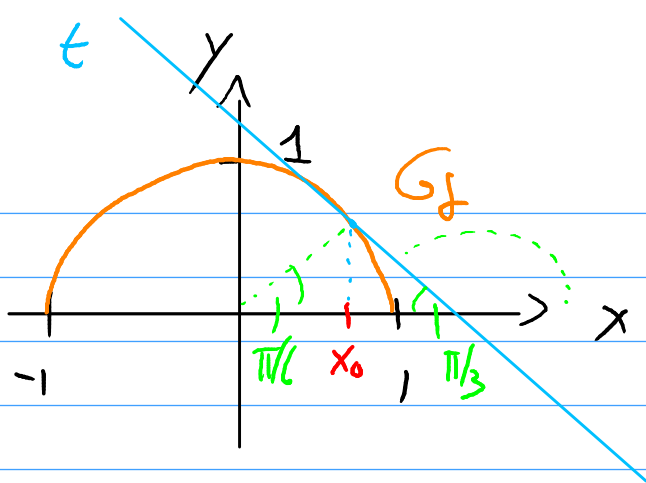
Résumons :

$$\frac{d}{dx} x^E = E x^{E-1} \quad \text{par } E \in \mathbb{Q}$$

$$\text{Quid de } \frac{d}{dx} x^{1/2} ? \quad \frac{d}{dx} x^{\pi} = ?$$

$$\text{Réponse sûrement 2.} \quad \frac{d}{dx} x^{\pi} = ?$$

Exemple. ① Trouver la tangente à G ,
 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ en $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



$$G_f: f(x) = y = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow y^2 = 1-x^2 \text{ et } y \geq 0$$

$$\Rightarrow y^2 + x^2 = 1 \text{ et } y \geq 0$$

$$t(x) = mx + h$$

$\nearrow$
 $f'(x_0)$

$$f(x_0) = mx_0 + h = f(x_0)$$

$$\Rightarrow h = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

$$\Rightarrow \underline{t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

• calcul de $f'(x_0)$:

$$\left(\frac{d}{dx} \sqrt{1-x^2} \right) \Big|_{x=\sqrt{3}/2} = \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) \right) \Big|_{x=\sqrt{3}/2}$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Big|_{x=\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\sqrt{3}/2}{1/2} = \underline{\underline{-\sqrt{3}}}$$

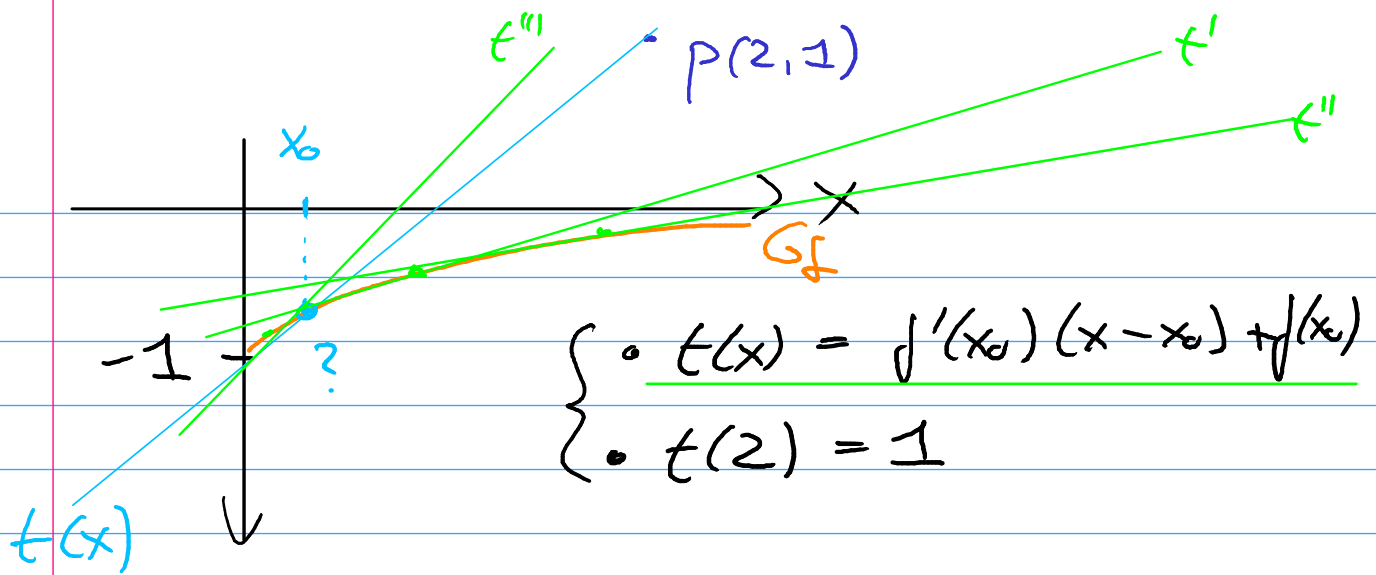
$$\bullet f(x_0): \quad \sqrt{1-x^2} \Big|_{x=\sqrt{3}/2} = 1/2$$

$$\Rightarrow \underline{t(x) = -\sqrt{3}(x - \sqrt{3}/2) + 1/2}$$

$$= \underline{\underline{-\sqrt{3}x + 2}}$$

② Trouver la tangente à G_f , par

$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ et qui passe par $P(2, 1)$



Pour une tangente à G_f en x_0 :

$$\begin{aligned}
 f'(x_0) &= \left(\frac{d}{dx} (x - \sqrt{x^2 + 1}) \right) \Big|_{x=x_0} \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \Big|_{x=x_0} \\
 &= 1 - \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + 1}}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t(x) = \left(1 - \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + 1}} \right) (x - x_0) + x_0 - \sqrt{x_0^2 + 1}$$

Déterminer x_0 t.q. $t(2) = 1$

$$\Rightarrow 1 = \left(1 - \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + 1}} \right) (2 - x_0) + x_0 - \sqrt{x_0^2 + 1}$$

• Par tâtonnement on trouve $x_0 = 0$.

• On multiplie par $\sqrt{x_0^2 + 1}$:

$$\sqrt{x_0^2 + 1} = \left(\sqrt{x_0^2 + 1} - x_0 \right) (2 - x_0) + x_0 \sqrt{x_0^2 + 1} - x_0^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_0^2 + 1} = 2\sqrt{x_0^2 + 1} - \cancel{x_0 \sqrt{x_0^2 + 1}} - 2x_0 + \cancel{x_0^2} + \cancel{x_0 \sqrt{x_0^2 + 1}} - \cancel{x_0^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_0^2 + 1} = 1 + 2x_0$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} x_0^2 + 1 = 1 + 4x_0 + 4x_0^2 \\ x_0 \neq -1/2 \end{matrix}$$

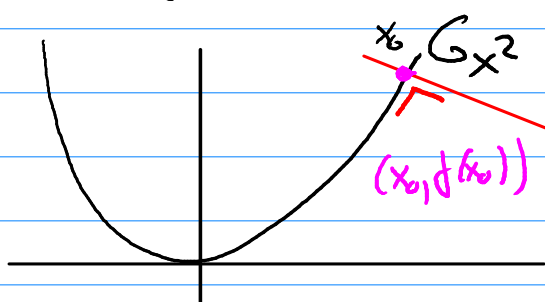
$$\Leftrightarrow 3x_0^2 + 4x_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0(3x_0 + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x_0 = 0}$$

$$\Rightarrow \underline{t(x) = x - 1} \quad (\text{tangente en } x_0 = 0)$$

③ Trouver la distance entre $P(6,3)$ et G sur $f(x) = x^2$



On cherche $d(P, (x_0, f(x_0)))$

Équations des normales:

$$\bullet \quad n(x) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\bullet \quad n(6) = 3 = \frac{-1}{f'(x_0)}(6 - x_0) + f(x_0)$$

$$= \frac{-1}{2x_0}(6 - x_0) + x_0^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{6x_0} = -6 + \cancel{x_0} + 2x_0^3$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^3 - 5x_0 - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 2)(2x_0^2 + 4x_0 + 3)$$

$$\text{Calcul de } \Delta = 16 - 4 \times 2 \times 3 < 0$$

Donc, $x_0 = 2$ et $f(x_0) = 4$ donnent les coordonnées de l'unique point sur G_{x^2} tel. que $(x_0, f(x_0)), P \in u(x)$

$$\Rightarrow u(x) = -\frac{1}{4}(x-2) + 4$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{x}{4}$$

$$\Rightarrow d(P, (x_0, f(x_0)))$$

$$= d((6, 3), (2, 4)) = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \underline{\underline{\sqrt{17}}}$$

Def: Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. On dit que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continûment dérivable sur I ssi

- $f'(x)$ existe $\forall x \in I$
- $I \ni x \mapsto f'(x)$ est continue sur I .

Exemple: ① $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{2x-1}}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Est-ce que $f(x)$ est continûment dérivable sur $I =]\frac{1}{2}, \infty[$?

• Si $x \in I \setminus \{1\}$, $f'(x) = \frac{-\frac{1}{2} \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{2x-1}}(x-1) - (1 - \sqrt{2x-1})}{(x-1)^2}$

$$= \frac{-(x-1) - \sqrt{2x-1}(1 - \sqrt{2x-1})}{(x-1)^2 \sqrt{2x-1}}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ Si } x=1 : f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \sqrt{2(1+h)-1}}{1+h-1} - (-1)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \sqrt{1+2h}}{h} + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+2h} + h}{h^2} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+1)^2 - (1+2h)}{h^2(h+1 + \sqrt{1+2h})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h^2(h+1 + \sqrt{1+2h})} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(h+1 + \sqrt{1+2h})} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} = f'(1)
 \end{aligned}$$

Vérifions si $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 1/2$:

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1) - \sqrt{2x-1} + 2x-1}{(x-1)^2 \sqrt{2x-1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x-1}}{(x-1)^2 \sqrt{2x-1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2 \sqrt{2x-1} (x + \sqrt{2x-1})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{2x-1} (x + \sqrt{2x-1})} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} = f'(1)
 \end{aligned}$$

Donc, $f(x)$ est continûment dérivable sur $]1/2, \infty[$.

②

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Est-ce que $f(x)$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$?

• $f'(x)$ si $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \sin(1/x) + x^2 \cos(1/x) \cdot -\frac{1}{x^2} \\ &= 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) \end{aligned}$$

• $f'(0)$: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{h}_{\text{"0"}} \underbrace{\sin(1/h)}_{\text{"x bornée"}} = 0 \\ &\Rightarrow \underline{f'(0) = 0} \end{aligned}$$

Mais: $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)$
"0" "x bornée"

$\notin \mathbb{R}$ n'existe pas. !

Donc, $f'(x)$ existe $\forall x \in \mathbb{R}$ mais
 $x \mapsto f'(x)$ n'est pas continue

Notation: On note $D^1(I)$ l'ensemble des fonctions une fois dérivable sur I et $C^1(I)$ l'ensemble des fonctions une fois continûment dérivables.

On a

$$\begin{aligned} C^0(I) &\not\supseteq D^1(I) \not\supseteq C^1(I) \not\supseteq D^2(I) \\ &\not\supseteq C^2(I) \dots \dots \not\supseteq C^\infty(I) \end{aligned}$$

$C^\infty(I)$ est appelé parfois ensemble des fonctions "lisses" ($\supset \Leftrightarrow \supset$ et $\neq$)

p.ex. $\cos(x)$, $\sin(x)$, $p(x)$, $\ln(x)$, ...

§ 4.3. Approximations linéaire

Rappel: On pose pour $f \in \mathcal{D}^1(I)$

$$r(h) := \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$$

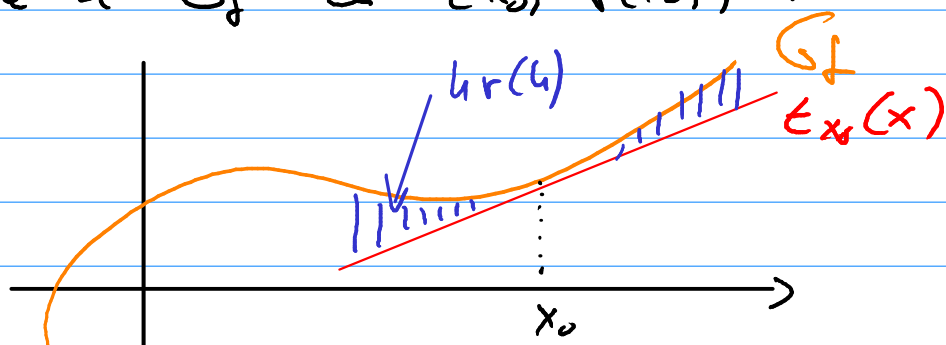
- $\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = 0$

- $f(x_0+h) = \underbrace{f(x_0) + h f'(x_0)}_{\text{Approximation linéaire de } f \text{ en } x_0} + \underbrace{h r(h)}_{\text{reste}}$

on a aussi

- $f(x) = \underbrace{f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0)}_{\text{approximation linéaire de } f \text{ en } x_0} + \underbrace{(x-x_0)r(x-x_0)}_{\text{reste}}$

l'approximation linéaire de f en x_0 est la tangente à G_f en $(x_0, f(x_0))$:



Exemple: On connaît $\sqrt[3]{8} = 2$. Que vaut $\sqrt[3]{8,012}$?

On pose $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$.

On a

$$\begin{aligned} f(x) &= f(8) + (x-8)f'(8) + (x-8)r(x-8) \\ &= 2 + (x-8) \cdot \frac{1}{3} 8^{-2/3} + (x-8)r(x-8) \\ &= 2 + 0.012 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + 0.012 r(0.012) \\ &= 2 + 0.001 + 0.012 r(0.012) \\ &\approx 2,001 \end{aligned}$$

("vraie valeur" $\sqrt[3]{8,012} = 2,000'999'499$

$$0.012 r(0.012) = 0,000'000'500' \dots$$

À la demande d'un étudiant pas content,
on peut faire mieux:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \frac{1}{24} f^{(4)}(x_0)(x-x_0)^4 \end{aligned}$$

+ ...
de faits au 2^{ème} semestre

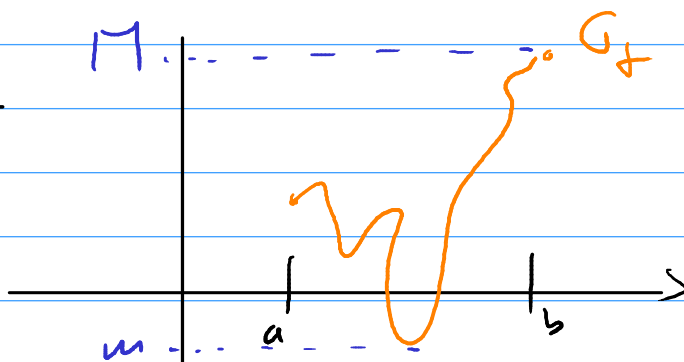
§ 4.4. Théorème des accroissements finis

Thm: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Il existe $m, M \in \mathbb{R}$ d.q.

$$\text{Im}(f) = f([a, b]) = [m, M]$$

Graphiquement:

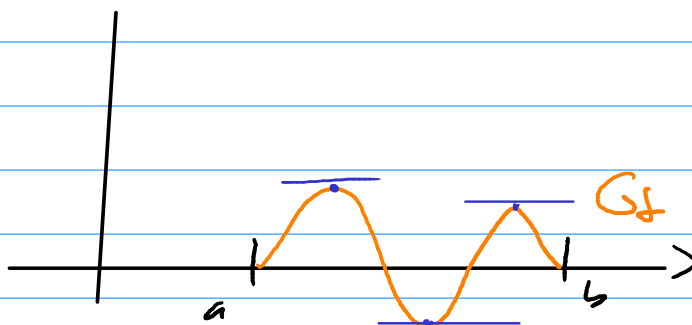


preuve en lecture complémentaire sur Moodle. $\square$

Thm de Rolle: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable

sur $]a, b[$ et supposons f continue sur $[a, b]$. Si $f(a) = 0 = f(b)$. Il existe alors $c \in]a, b[$ d.q. $f'(c) = 0$.

Graphiquement:



preuve: supposons d'abord que $f(x) = 0 \forall x \in [a, b]$.
Alors $\forall c \in]a, b[$ on a $f'(c) = 0$. Dans le thm

est vérifié dans ce cas.

Supposons $\exists x \in]a, b[\text{ t.q. } f(x) \neq 0$. Par le théorème précédent on sait que $\text{Im}(f) = [m, M]$. Puisque $\exists x \in]a, b[\text{ t.q. } f(x) \neq 0$, mais que $f(a) = 0 = f(b)$, on a que $m \neq 0$ ou $M \neq 0$.

Sans perte de généralité, on suppose $m \neq 0$. Sa veut dire $\exists c \in]a, b[\text{ t.q. } f(c) = m$.

La fonction f est dérivable en $]a, b[$, donc $f'(c)$ existe.

Par définition, on a

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \end{aligned}$$

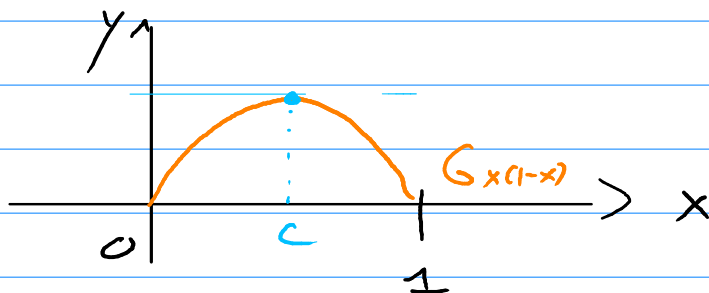
$$\begin{aligned} \text{Mais } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} &\leq 0 \quad (\text{car } f(c+h) - f(c) \geq 0) \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} &\geq 0 \end{aligned}$$

Donc, $0 \leq f'(c) \leq 0$ et donc, $f'(c) = 0$ $\square$.

Exemples: ① $f(x) = x(1-x)$, $]a, b[= [0, 1]$

On a $f(0) = 0 = f(1)$, $f'(x)$ existe $\forall x \in]0, 1[$
Les hypothèses de Rolle sont vérifiées.

Graphiquement:



$$f'(x) = (x(1-x))' = (1-x) + x(-1) = 1-2x$$

Donc, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} = \underline{\underline{c}}$

② $f(x) = \ln(x^2 + \frac{3}{4})$, $[a, b] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$f(-\frac{1}{2}) = 0 = f(\frac{1}{2})$ et f est dérivable sur $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} [$

et $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 3/4} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 3/4}$

$\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x = \underline{\underline{0}} = c$

On a de plus $f(0) = \ln(3/4) = m < 0$,

et sur $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} [$, $f(x) \leq 0$. Donc, $M=0$.

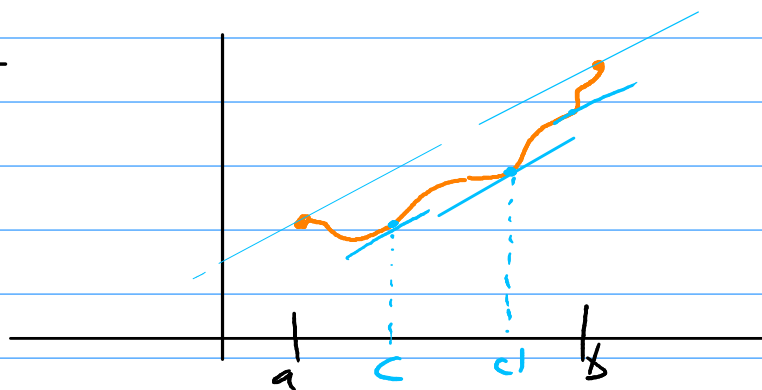
Thm des accroissements finis: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- tel que
- f est continue sur $[a, b]$
 - f est dérivable sur $]a, b[$

Alors $\exists c \in]a, b[$ l.q.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Graphiquement:



preuve: posons

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) - f(a)$$

"droite moyenne de $f(x)$ sur $[a, b]$ ".

Cette fonction est dérivable sur $]a, b[$ et $g(a) = 0 = g(b)$.

$g(x)$ vérifie les hypothèses du thm de Rolle.

Il existe donc $c \in]a, b[$ d.q. $g'(c) = 0$:

Donc :

$$g'(c) = \left(f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) \Big|_{x=c} = 0$$

$$\Rightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \square.$$

Exemples: ① $f(x) = x^2 - x$ sur $[a, b]$
chercher c d.q. $f'(c) = \frac{b^2 - b - a^2 + a}{b - a}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 1 = \frac{b^2 - b - a^2 + a}{b - a} = \frac{b^2 - a^2 - (b - a)}{b - a} \\ &= \frac{(b - a)(b + a) - (b - a)}{b - a} = b + a - 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2x = b + a \Rightarrow \underline{x = \frac{b + a}{2}}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \begin{cases} -(x-2) & \text{si } x \leq 2 \\ 2(x-4) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

et $[a, b] = [1, 3]$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(1)}{2} = \frac{-2 - 1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\nexists c \in]1, 3[\text{ d.q. } f'(c) = -\frac{3}{2}$$

En $\mathbb{R}$, si $x < 2$, $f'(x) = -1$ et
si $x > 2$, $f'(x) = 2$

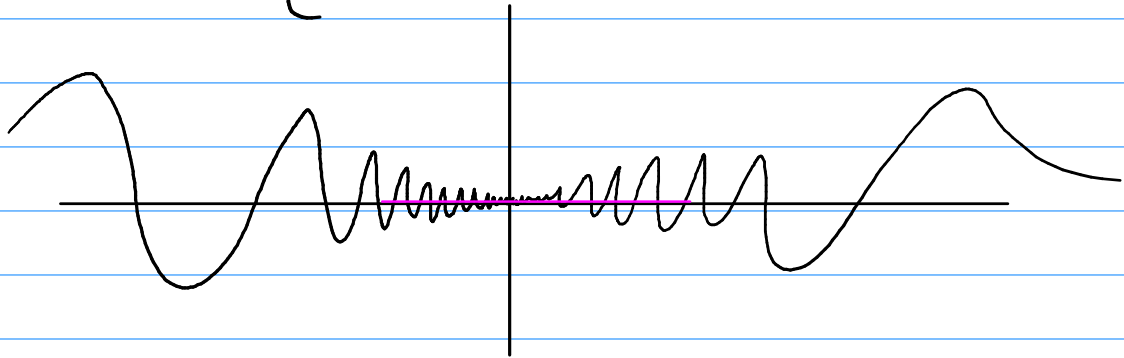
Mais $f'(x) \neq -\frac{3}{2}$.

Paradoxe apparent, mais f n'est pas dérivable sur $]1, 3[$, car $f'(2)$ n'existe pas.

③ $f(x) = x^3$, $[a, b] = [-1, 1]$, alors,

$f'(0) = 3x^2|_{x=0} = 0$, mais ce n'est ni un maximum, ni un minimum pour $f(x)$ sur $[-1, 1]$.

④
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



|| Marche à suivre pour trouver les extrema d'une fonction dérivable sur $[a, b]$

- tester les valeurs $f(a)$ et $f(b)$
- tester les valeurs $c \in]a, b[$ avec $f'(c) = 0$
- si $f'(c)$ n'existe pas pour $c \in]a, b[$, tester $f(c)$.

Exemples de révision:

① Montrer à l'aide de la définition que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

Def: $\forall \varepsilon > 0, \exists B(\varepsilon) \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x \leq B \Rightarrow |f(x) - e| < \varepsilon$

Dans notre cas, il faut trouver pour un $\varepsilon > 0$ donné, $B \in \mathbb{R}$ t.q. $x \leq B$ alors

$$|x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 0| < \varepsilon$$

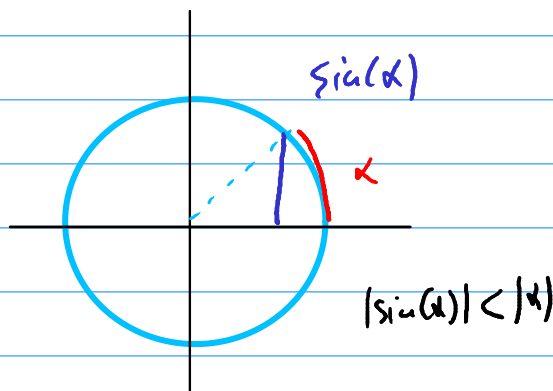
$$\Leftrightarrow |x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x| \left| \frac{1}{x^2} \right| < \varepsilon$$

(car, $|\sin(x)| \leq |x|$)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{|x|} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon}$$



On prend alors $B = -\frac{1}{\varepsilon}$ et

$$x < B \Leftrightarrow x < -\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon}$$

⚠ $B = \frac{1}{\varepsilon}$ ne marche pas.

② Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 1} + x}{x} (x^2 - 1)(2 - \sin(x))$

• $(2 - \sin(x)) \in [1, 3]$, "loin de 0".

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1) = \infty$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 1} + x}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} + x}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(-\sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} + 1 \right)}{\cancel{x}} \\
 &= 1 - \sqrt{2} < 0
 \end{aligned}$$

Dans $\lim_{x \rightarrow -\infty} \textcircled{2} = -\infty$

Avec le conjugué:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 1} + x}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 1 - x^2}{x(\sqrt{2x^2 - 1} - x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x(\sqrt{2x^2 - 1} - x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 \left(-\sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} - 1 \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 1/x^2}{(-1 - \sqrt{2 - 1/x^2})} = \frac{1}{-1 - \sqrt{2}} \\
 &= \frac{1 - \sqrt{2}}{(-1 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \underline{1 - \sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

③ Montrer à l'aide de la définition

$$\text{que } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x} = 4$$

Def: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ l.q. $0 < |x - 2| < \delta$
 $|f(x) - 4| < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$. $\left| \frac{x^2 + 4}{x} - 4 \right| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{x^2 - 4x + 4}{x} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x^2 - 4x + 4| < \varepsilon$$

(si $x > 1$)

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \sqrt{\varepsilon}$$

Si $\delta = \min \{ \sqrt{\varepsilon}, 1 \}$

alors $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$

④ Calculer les limites

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3}$, b) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \ln\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3}$ $\left(\neq \frac{x - x}{x^3} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) (1 - \cos(x))}{x^3}$$

$$\stackrel{\text{IPE}}{\cong} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2} x^2}{x^3} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} y \tan\left(\frac{\pi}{2}(1-y)\right)$$

$$(y=1-x) \quad y \rightarrow 0$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} y \cot\left(\frac{\pi}{2}y\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan\left(\frac{\pi}{2}y\right)}$$

$$= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\pi}v}{\tan(v)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\pi}v}{v} = \underline{\underline{\frac{2}{\pi}}}$$

$$(v = \frac{\pi}{2}y)$$

