

Exemples de révision

Exemple 1 (Limite de fonction à l'infini - définition)

Montrer à l'aide de la définition que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il faut trouver M tel que

$$x < M \implies |x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 0| < \varepsilon.$$

On a

$$\begin{aligned} & |x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 0| < \varepsilon \\ \iff & |x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)| < \varepsilon \\ \iff & |x| \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| < \varepsilon \end{aligned}$$

Comme $|x| \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \leq |x| \cdot \left|\frac{1}{x^2}\right| = \frac{1}{|x|}$, on a

$$\frac{1}{|x|} < \varepsilon \implies |x| \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| < \varepsilon.$$

Puisque $\frac{1}{|x|} < \varepsilon \iff x \in]-\infty, -1/\varepsilon[\cup]1/\varepsilon, +\infty[$, on peut choisir $M = \frac{-1}{\varepsilon}$.

En effet, pour $M = \frac{-1}{\varepsilon}$, on a

$$x < M \implies \frac{1}{|x|} < \varepsilon \implies |x| \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| < \varepsilon \implies |x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 0| < \varepsilon.$$

Exemple 2 (Limite de fonction à l'infini - calcul)

Calculer

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 1} + x}{x} \cdot (x^2 - 1)(2 - \sin(x)).$$

On a

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 1} + x}{x} \cdot (x^2 - 1)(2 - \sin(x)) \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} + x}{x} \cdot (x^2 - 1)(2 - \sin(x)) \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} + x}{x} \cdot (x^2 - 1)(2 - \sin(x)) \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\left(-\sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} + 1\right)}_{\rightarrow -\sqrt{2}+1} \cdot \underbrace{(x^2 - 1)}_{\rightarrow +\infty} \underbrace{(2 - \sin(x))}_{\geq 1} \\
&= -\infty.
\end{aligned}$$

Exemple 3 (Limite de fonction en x_0 - définition)

Montrer à l'aide de la définition que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x} = 4.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On doit montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$0 < |x - 2| < \delta \implies \left| \frac{x^2 + 4}{x} - 4 \right| < \varepsilon.$$

On a, pour $x \in]1, 3[$,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{x^2 + 4}{x} - 4 \right| < \varepsilon &\iff \left| \frac{x^2 + 4 - 4x}{x} \right| < \varepsilon \\
&\iff \left| \frac{(x - 2)^2}{x} \right| < \varepsilon \\
&\iff \frac{(x - 2)^2}{x} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Pour $x \in]1, 3[$, on a $\frac{(x - 2)^2}{x} < \frac{(x - 2)^2}{1}$, et donc

$$\frac{(x - 2)^2}{1} < \varepsilon \implies \frac{(x - 2)^2}{x} < \varepsilon.$$

Puisque $\frac{(x-2)^2}{1} < \varepsilon \iff |x-2| < \sqrt{\varepsilon}$, on peut donc prendre $\delta = \min\{1, \sqrt{\varepsilon}\}$.

En effet, pour un tel δ , $x \in]1, 3[$, et

$$|x-2| < \varepsilon \implies \left| \frac{x^2+4}{x} - 4 \right| < \varepsilon,$$

par le raisonnement ci-dessus.

Exemple 4 (Limite de fonction en x_0 - calcul)

1. Calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3}.$$

2. Calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

1. On a, en utilisant des IPE en 0,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)(1 - \cos(x))}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2/2)}{x^3} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. On a, en posant le changement de variable $y = 1 - x$ et en utilisant des IPE en 0,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) &= \lim_{y \rightarrow 0} y \tan\left(\frac{\pi}{2}(1-y)\right) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} y \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}y\right) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan\left(\frac{\pi}{2}y\right)} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\frac{\pi}{2}y} \\ &= \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Exemple 5 (Calcul du nombre dérivé - rapport de Newton)

Calculer le nombre dérivé $f'(x_0)$ de la fonction

$$f(x) = \sin^3(x^2)$$

pour un x_0 quelconque, en utilisant la limite du rapport de Newton.

On a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin^3(x^2) - \sin^3(x_0^2)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\sin(x^2) - \sin(x_0^2))(\sin^2(x^2) + \sin(x^2)\sin(x_0^2) + \sin^2(x_0^2))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\sin(x^2) - \sin(x_0^2))(\sin^2(x^2) + \sin(x^2)\sin(x_0^2) + \sin^2(x_0^2))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) \frac{(\sin(x^2) - \sin(x_0^2))}{x^2 - x_0^2} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (\sin^2(x^2) + \sin(x^2)\sin(x_0^2) + \sin^2(x_0^2)) \\ &= 2x_0 \cdot \cos(x_0^2) \cdot 3\sin^2(x_0^2). \end{aligned}$$

Exemple 6 (Application géométrique de la dérivée)

Déterminer l'équation de la normale commune aux graphes de

$$f(x) = (x - 2)^2 + 3 \quad \text{et} \quad g(x) = (x + 2)^2 - 3.$$

Soit $y = mx + c$ la normale commune, passant par $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, g(x_2))$. On

a donc

$$\bullet \quad m = \frac{-1}{f'(x_1)} = \frac{-1}{2x_1 - 4} = \frac{-1}{g'(x_2)} = \frac{-1}{2x_2 + 4}$$

d'où $x_1 = x_2 + 4$.

• $y = mx + c$ passe par $(x_1, f(x_1))$:

$$f(x_1) = mx_1 + c.$$

• $y = mx + c$ passe par $(x_2, g(x_2))$:

$$g(x_2) = mx_2 + c.$$

• En soustrayant, on obtient $f(x_1) - g(x_2) = m(x_1 - x_2)$, et donc

$$\begin{aligned}
f(x_1) - g(x_2) &= m(x_1 - x_2) \\
\iff f(x_2 + 4) - g(x_2) &= m(x_2 + 4 - x_2) \\
\iff (x_2 + 4 - 2)^2 + 3 - ((x_2 + 2)^2 - 3) &= \frac{-1}{2x_2 + 4} \cdot 4 \\
\iff (x_2 + 4 - 2)^2 + 3 - ((x_2 + 2)^2 - 3) &= \frac{-1}{2x_2 + 4} \cdot 4 \\
\iff x_2 &= \frac{-7}{3}.
\end{aligned}$$

- La valeur de x_2 nous permet de déterminer m et c :

$$\begin{aligned}
m &= \frac{-1}{2x_2 + 4} = \frac{-1}{2\left(\frac{-7}{3}\right) + 4} = \frac{3}{2}, \\
c &= g(x_2) - mx_2 = (x_2 + 2)^2 - 3 - \frac{3}{2}x_2 = \left(\frac{-7}{3} + 2\right)^2 - 3 - \frac{3}{2} \cdot \frac{-7}{3} = \frac{11}{18}.
\end{aligned}$$

On a donc la normale commune $y = \frac{3}{2}x + \frac{11}{18}$.

On remarque que d'après notre résolution ci-dessus, il n'y a qu'une seule normale commune à ces deux courbes.

Exemple 7 (Fonction continûment dérivable)

Déterminer si la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\sin^2(x) + 1} - x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continûment dérivable en $x = 0$.

f est dérivable pour $x \neq 0$ par les règles de calcul, et

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{\sin^2(x)+1}} - 1\right)x - \left(\sqrt{\sin^2(x)+1} - x - 1\right)}{x^2}.$$

En 0, en utilisant la définition en termes du rapport de Newton, on a

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{\sin^2(h)+1}-h-1}{h} - (-1)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin^2(h)+1} - h - 1 + h}{h^2} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin^2(h)+1} - 1}{h^2} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin^2(h)+1} - 1}{h^2} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2(h) + 1 - 1}{h^2(\sqrt{\sin^2(h)+1} + 1)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2(h)}{h^2(\sqrt{\sin^2(h)+1} + 1)} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

f' est continue en 0 si $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$. En effet,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin(x) \cos(x)}{\sqrt{\sin^2(x)+1}} - 1 \right) x - \left(\sqrt{\sin^2(x)+1} - x - 1 \right)}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x) \cos(x) - x \sqrt{\sin^2(x)+1} - (\sin^2(x)+1) + (x+1) \sqrt{\sin^2(x)+1}}{x^2 \sqrt{\sin^2(x)+1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x) \cos(x) - (\sin^2(x)+1) + \sqrt{\sin^2(x)+1}}{x^2 \sqrt{\sin^2(x)+1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x \sin(x) \cos(x)}{x^2 \sqrt{\sin^2(x)+1}} + \frac{-(\sin^2(x)+1) + \sqrt{\sin^2(x)+1}}{x^2 \sqrt{\sin^2(x)+1}} \right]
\end{aligned}$$

où, en utilisant un IPE dans le premier terme, et en simplifiant le deuxième, on

obtient

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^2 \cos(x)}{x^2 \sqrt{\sin^2(x) + 1}} + \frac{-\sqrt{\sin^2(x) + 1} + 1}{x^2} \right] \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{\sin^2(x) + 1} + 1}{x^2} \end{aligned}$$

En utilisant l'expression conjuguée, on a

$$\begin{aligned} &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\sin^2(x) + 1)}{x^2(1 + \sqrt{\sin^2(x) + 1})} \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2(x)}{x^2(1 + \sqrt{\sin^2(x) + 1})} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \\ &= f'(0). \end{aligned}$$

f est donc dérivable en 0, avec f' continue en 0, ce qui montre que f est continûment dérivable en 0.