Corrigé 9

1. Soit $f(x) = a\,x + b$, où a et b sont deux nombres réels quelconques.

Montrer à l'aide de la définition que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a\,x_0 + b$.

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Montrons qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$0 \ < \ |\,x - x_0\,| \ < \ \delta \quad \Rightarrow \quad |\,f(x) - (a\,x_0 + b)\,| \ < \ \varepsilon\,.$$

On exploite la "contrainte verticale" définie par ε, [$f(x)$ appartient à l'$\varepsilon-$voisinage de $(a\,x_0 + b)$], pour en déduire une "contrainte horizontale" : x appartient à un $\delta-$voisinage épointé de x_0 :

$$|\,a\,x + b - (a\,x_0 + b)\,| \ < \ \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |\,a\,x - a\,x_0\,| \ < \ \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |\,a\,| \cdot |\,x - x_0\,| \ < \ \varepsilon\,.$$

Deux cas se présentent selon que a est nul ou non nul :

- si $a \neq 0$, $\quad |\,f(x) - (a\,x_0 + b)\,| \ < \ \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |\,x - x_0\,| \ < \ \frac{\varepsilon}{|\,a\,|}$,

  donc tout δ vérifiant $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{|\,a\,|}$ est solution, en effet :

  $$0 < |\,x - x_0\,| < \delta \leq \frac{\varepsilon}{|\,a\,|} \quad \Rightarrow \quad |\,f(x) - (a\,x_0 + b)\,| < \varepsilon$$

- et si $a = 0$, alors $f(x) = b$ et tout $\delta > 0$ convient, en effet $|\,f(x) - b\,| = 0 < \varepsilon$ sans aucune contrainte sur x.

Nous venons de montrer que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$. De telles fonctions sont dites continues sur $\mathbb{R}$.

2. En utilisant la définition de la limite d'une fonction, montrer que

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = -1\,.$$

Pour vérifier que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = -1$, il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

il existe $\delta > 0$ tel que

$$0 < |x - 0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - (-1)\right| < \varepsilon\,.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ donné.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}-(-1)\right|<\varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{2x^2}{x^2+1}\right|<\varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2x^2}{x^2+1}<\varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad 2x^2<\varepsilon\left(x^2+1\right) \\
&\Leftrightarrow \quad (2-\varepsilon)\,x^2<\varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad x^2<\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\,, \qquad (\varepsilon<2) \\
&\Leftrightarrow \quad |x|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} \\
&\Leftrightarrow \quad |x-0|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}\,.
\end{aligned}$$

Donc tout $0<\delta\leq\sqrt{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}$ convient, car

$$0<|x-0|<\delta \quad \left(\text{avec } 0<\delta\leq\sqrt{\tfrac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}\right) \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x^2-1}{x^2+1}-(-1)\right|<\varepsilon\,.$$

Remarque : si $\varepsilon\geq 2$ l'inégalité $(2-\varepsilon)\,x^2<\varepsilon$ est trivialement vérifiée pour tout $x\in\mathbb{R}$, (la contrainte définie par ε est réellement contraignante si ε est petit).

3. On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x+(x-\frac{3}{2})\cdot\operatorname{sgn}(1-x)$.

a) Faire la représentation graphique de la fonction f (unité = 6 carrés).

b) Pour $\varepsilon=\varepsilon_1=1$, déterminer graphiquement $\delta=\delta_1$ vérifiant la relation suivante :

$$0 < |x-1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-2| < \varepsilon\,.$$

c) Qu'en est-il pour $\varepsilon=\varepsilon_2=\frac{1}{3}$?

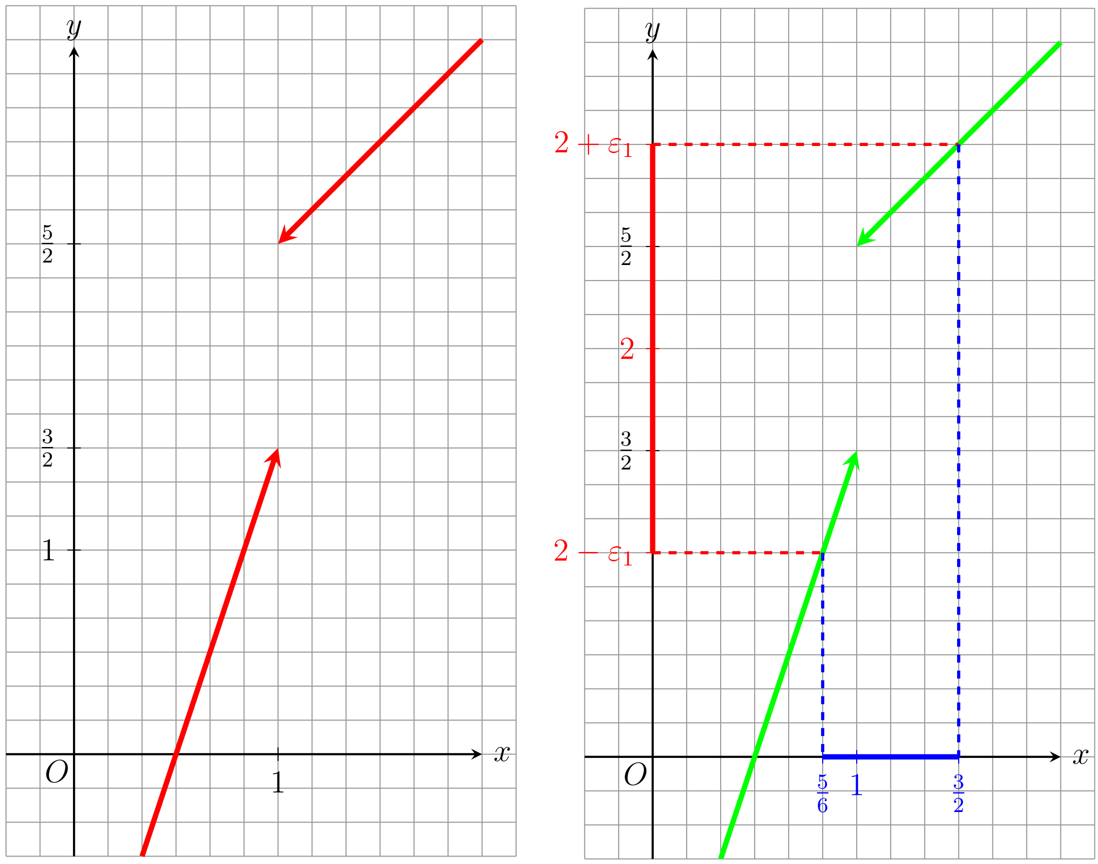
Il s'agit d'illustrer la définition de la limite en x_0 sur un contre-exemple.

a) $f(x)=2x+(x-\frac{3}{2})\cdot\operatorname{sgn}(1-x)$, $\qquad D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

- Si $x<1$, $\quad \operatorname{sgn}(1-x)=+1 \quad$ et $\quad f(x)=2x+(x-\frac{3}{2})=3x-\frac{3}{2}$.
- Si $x>1$, $\quad \operatorname{sgn}(1-x)=-1 \quad$ et $\quad f(x)=2x-(x-\frac{3}{2})=x+\frac{3}{2}$.

$$f(x)=\begin{cases} 3x-\frac{3}{2} & \text{si } x<1 \\ x+\frac{3}{2} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Voici la représentation graphique de $f(x)$:



b) On détermine graphiquement les abscisses x dont l'image par f est dans l'ε_1-voisinage de 2 :

$$|\,f(x)-2\,|<\varepsilon_1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)\in\,]\,2-\varepsilon_1\,,\,2+\varepsilon_1\,[\quad \Leftrightarrow \quad f(x)\in\,]\,1\,,\,3\,[\,.$$

$$f(x)\in\,]\,1\,,\,3\,[\quad \Leftrightarrow \quad x\in\,]\,\tfrac{5}{6}\,,\,\tfrac{3}{2}\,[\,.$$

On en déduit δ_1 en imposant que l'intervalle $]\,1-\delta_1\,,\,1+\delta_1\,[$, centré en $x_0=1$, soit inclus dans l'intervalle $]\,\frac{5}{6}\,,\,\frac{3}{2}\,[$.

Tout $0<\delta_1\leq\frac{1}{6}$ convient, en effet :

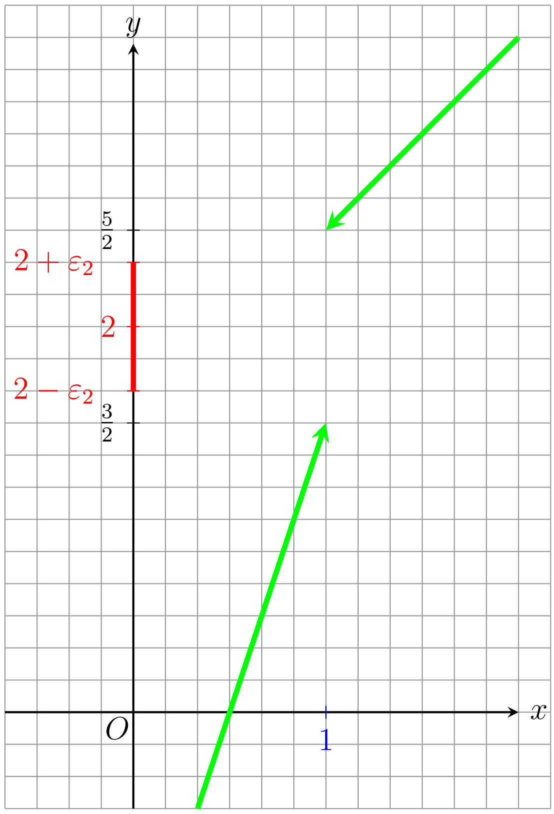
$$0<|\,x-1\,|<\delta_1\leq\frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad |\,f(x)-2\,|<\varepsilon_1\,.$$

c) Pour $\varepsilon_2=\frac{1}{3}$, l'antécédent par f de l'intervalle $]\,2-\varepsilon_2\,,\,2+\varepsilon_2\,[$ est l'ensemble vide.

Donc δ_2 n'existe pas. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq 2$.

Plus généralement, quelque soit l'ordonnée $a\in\mathbb{R}$, l'ε_2-voisinage de a $J=\,]\,a-\varepsilon_2\,,\,a+\varepsilon_2\,[$ ne peut pas contenir l'image par f d'un intervalle $I=\,]\,1-\delta\,,\,1+\delta\,[$, $\delta>0$, car J est de longueur $\ell=2\,\varepsilon_2=\frac{2}{3}<1$.

Donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas.



4. Calculer la limite des fonctions suivantes en x_0.

a) $a(x) = \dfrac{2x^2+x-3}{x^2+2x-3}$, $x_0 = 1$,

b) $b(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{x}$, $x_0 = 0$,

c) $c(x) = \dfrac{\sqrt[3]{2x^5+x^3}}{x^2+3x}$, $x_0 = 0$.

---

a) $\lim\limits_{x\to 1} a(x)$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

Si le numérateur et le dénominateur de $a(x)$ sont nuls en $x_0 = 1$, on peut simplifier cette fraction rationnelle par $(x-1)$.

Sur un voisinage pointé de $x_0 = 1$, $(x \neq 1)$, on a

$$a(x) = \frac{2x^2+x-3}{x^2+2x-3} = \frac{(x-1)\,(2x+3)}{(x-1)\,(x+3)} = \frac{2x+3}{x+3}. \qquad \text{D'où} \quad \lim_{x\to 1} a(x) = \frac{5}{4}.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} b(x)$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

On cherche à débusquer le facteur x qui se cache dans l'expression du numérateur.

Pour faire apparaître ce facteur x, on amplifie le numérateur par son expression conjuguée.

Sur un voisinage pointé de $x_0 = 0\,,\ (x \neq 0)\,,$ on a

$$b(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{x} = \frac{(x^2+1)-(x-1)^2}{x\left[\sqrt{x^2+1}-(x-1)\right]} = \frac{2x}{x\left[\sqrt{x^2+1}-(x-1)\right]}\,,$$

$$b(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}-(x-1)}\,. \qquad \text{D'où} \quad \lim_{x\to 0} b(x) = 1\,.$$

c) On met en évidence, au numérateur et au dénominateur, les plus basses puissances de x, pour éviter d'avoir des termes qui divergent vers l'infini :

$$c(x) = \frac{\sqrt[3]{2x^5+x^3}}{x^2+3x} = \frac{\sqrt[3]{x^3\cdot(2x^2+1)}}{x\cdot(x+3)} = \frac{x\cdot\sqrt[3]{2x^2+1}}{x\cdot(x+3)} = \frac{\sqrt[3]{2x^2+1}}{x+3}\,, \quad x \neq 0\,.$$

$$\lim_{x\to 0} c(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{2x^2+1}}{x+3} = \frac{1}{3}\,.$$

5. Pour quelle valeur du paramètre réel a, la limite suivante existe-t-elle ?

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$$

Donner alors la valeur de cette limite.

Le dénominateur est nul en $x = -2\,.$

Si le numérateur est non nul en $x = -2\,,$ alors on a :

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2} = \infty\,.$$

Il est donc nécessaire que $x = -2$ soit aussi un zéro du numérateur :

$$3x^2+ax+a+3\Big|_{x=-2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12-2a+a+3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 15\,.$$

Si $a = 15\,,$ le numérateur et le dénominateur sont nuls en $x = -2\,,$ on peut donc les factoriser tous les deux par $(x+2)\,.$

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+15x+18}{x^2+x-2} = \lim_{x\to -2} \frac{3\,(x+2)\,(x+3)}{(x+2)\,(x-1)} = \lim_{x\to -2} \frac{3\,(x+3)}{x-1} = -1\,.$$

6. On considère la fonction rationnelle f définie par $f(x) = \dfrac{x\cdot(x-b)^2}{(x+1)\,(x-a)}\,,$

où a et b sont des paramètres réels.

a) Déterminer les conditions sur les paramètres a et b pour que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe.
Donner alors la valeur de cette limite.

b) Déterminer les conditions sur les paramètres a et b pour que $f(x)$ diverge vers l'infini lorsque $x \to a^+$ et $x \to a^-$.
Préciser alors si cette limite est égale à $+\infty$ ou $-\infty$.

---

a) $x = a$ est un pôle de f. Comment le faire disparaître ?

Il faut simplifier la fraction rationnelle par $x - a$. Cela est possible si et seulement si

- $a = 0$. Dans ce cas, on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot(x-b)^2}{x\cdot(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-b)^2}{x+1} = b^2$.

- Ou $a = b$. Dans ce cas, on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to b} \dfrac{x\cdot(x-b)^2}{(x+1)\,(x-b)} = \lim\limits_{x\to b} \dfrac{x\cdot(x-b)}{x+1}$.

  Il faut encore distinguer deux cas selon que $b = -1$ ou non :

  - si $a = b = -1$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x\cdot(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} x = -1$,

  - si $a = b \neq -1$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to b} \dfrac{x\cdot(x-b)}{x+1} = 0$.

b) $x = a$ est un pôle de f. Comment faire en sorte qu'il ne disparaisse pas ?

Pour éviter que l'on puisse simplifier la fraction rationnelle par $x - a$, il faut éviter que ce facteur n'apparaisse au numérateur. C'est le cas si et seulement si

$$a \neq 0 \qquad \text{et} \qquad a \neq b\,.$$

Dans ce cas, on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x\cdot(x-b)^2}{(x+1)\,(x-a)} = \pm\infty$.

Pour être plus précis, il faut connaître le signe de $f(x)$ au voisinage de a.

Pour cela, on étudie le signe de $Q(x) = \dfrac{x}{(x+1)\,(x-a)}$ au voisinage de $x = a$.

Il faut distinguer quatre cas selon la position de a par rapport à -1 et 0.

- Que se passe-t-il si $a < -1$?

  Signe de $f(x)$ au voisinage de $x = a$ dans le cas $a < -1$:

x		a		-1		0	
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$(x+1)(x-a)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$Q(x)$	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

$f(x)$ est donc négatif sur un voisinage à gauche de a et positif sur un voisinage à droite de a :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

- Que se passe-t-il si $a = -1$?

Si $a = -1$, $\quad f(x) = \dfrac{x\cdot(x-b)^2}{(x+1)^2} \quad$ et $\quad \operatorname{sgn}[f(x)] = \operatorname{sgn}(x)$,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x\cdot(x-b)^2}{(x+1)^2} = -\infty\,.$$

- Que se passe-t-il si $-1 < a < 0$?

Signe de $f(x)$ au voisinage de $x = a$ dans le cas $-1 < a < 0$:

x		-1		a		0	
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$(x+1)(x-a)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$Q(x)$	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

$f(x)$ est donc positif sur un voisinage à gauche de a et négatif sur un voisinage à droite de a :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

- Que se passe-t-il si $0 < a$?

Signe de $f(x)$ au voisinage de $x = a$ dans le cas $0 < a$:

x		-1		0		a	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(x+1)(x-a)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$Q(x)$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$

$f(x)$ est donc négatif sur un voisinage à gauche de a et positif sur un voisinage à droite de a :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

7. Calculer la limite des fonctions suivantes en x_0.

a) $a(x) = \left(\frac{-1}{\sqrt{(x+2)^2}} + \cos\frac{\pi}{x+2}\right)(-2+\sin\frac{\pi}{x+2})\,, \quad x_0 = -2\,.$

b) $b(x) = \dfrac{1}{2x-6+\sqrt{x^2+x-2}}\,, \quad x_0 = 2\,.$

---

a) On étudie séparément le comportement de $\left[\frac{-1}{\sqrt{(x+2)^2}} + \cos(\frac{\pi}{x+2})\right]$ et de $\left[-2+\sin(\frac{\pi}{x+2})\right]$ sur un voisinage pointé de $x_0 = -2$.

- $\cos(\frac{\pi}{x+2})$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers -2, mais est borné et $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-1}{\sqrt{(x+2)^2}} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to -2}\left[\dfrac{-1}{\sqrt{(x+2)^2}} + \cos\left(\frac{\pi}{x+2}\right)\right] = -\infty$.
- D'autre part $\lim\limits_{x\to -2}\left[-2+\sin\left(\frac{\pi}{x+2}\right)\right]$ n'existe pas, mais $-2+\sin\left(\frac{\pi}{x+2}\right)$ est de signe constant :

$$-2+\sin\left(\tfrac{\pi}{x+2}\right) \le -1 < 0\,, \quad \forall\, x \neq -2\,.$$

Donc $$\lim_{x\to -2} \underbrace{\left[\frac{-1}{\sqrt{(x+2)^2}} + \cos(\tfrac{\pi}{x+2})\right]}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{\left[-2+\sin(\tfrac{\pi}{x+2})\right]}_{\le -1<0} = +\infty\,.$$

b) La fonction $b(x)$ diverge vers l'infini lorsque $x \to 2$.

On cherche à être plus précis en déterminant le signe de $b(x)$ selon que x est dans un voisinage à gauche ou à droite de $x_0 = 2$.

Soit $D(x) = 2x-6+\sqrt{x^2+x-2}$, le dénominateur de $b(x)$.

- Dans un voisinage à gauche de $x_0 = 2$, x peut s'écrire $x = 2-\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

$$D(x) = D(2-\varepsilon) = 2\,(2-\varepsilon) - 6 + \sqrt{(2-\varepsilon)^2 + (2-\varepsilon) - 2}$$

$$D(x) = -2-2\,\varepsilon + \underbrace{\sqrt{(2-\varepsilon)^2 - \varepsilon}}_{<\,2-\varepsilon} < -2-2\,\varepsilon + (2-\varepsilon) = -3\,\varepsilon < 0\,.$$

Donc $\lim\limits_{x\to 2^-} b(x) = -\infty$.

- Dans un voisinage à droite de $x_0 = 2$, x peut s'écrire $x = 2+\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

$$D(x) = D(2+\varepsilon) = 2\,(2+\varepsilon) - 6 + \sqrt{(2+\varepsilon)^2 + (2+\varepsilon) - 2}$$

$$D(x) = -2+2\,\varepsilon + \underbrace{\sqrt{(2+\varepsilon)^2 + \varepsilon}}_{>\,2+\varepsilon} > -2+2\,\varepsilon + (2+\varepsilon) = 3\,\varepsilon > 0\,.$$

Donc $\lim\limits_{x\to 2^+} b(x) = +\infty$.

Autre méthode

Le dénominateur est nul en $x_0 = 2$. On fait apparaître le facteur $(x-2)$ en amplifiant le dénominateur par son expression conjuguée.

$$b(x) = \frac{1}{2x-6+\sqrt{x^2+x-2}} = \frac{2x-6-\sqrt{x^2+x-2}}{(2x-6)^2-(x^2+x-2)} = \frac{2x-6-\sqrt{x^2+x-2}}{3x^2-25x+38},$$

$$b(x) = \frac{2x-6-\sqrt{x^2+x-2}}{(x-2)\,(3x-19)} = \frac{1}{x-2}\cdot\frac{2x-6-\sqrt{x^2+x-2}}{3x-19}.$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x-6-\sqrt{x^2+x-2}}{3x-19} = \frac{4}{13} > 0$.

On en déduit qu'au voisinage de $x_0 = 2$, $b(x)$ est du signe de $x-2$:

$$\lim_{x\to 2^-} b(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 2^+} b(x) = +\infty\,.$$

8. Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle a = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\,\sin x}$

d) $\displaystyle d = \lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos x-3\cos^2 x}{\sin(x^2\sqrt{4-x})}$

b) $\displaystyle b = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^6)}{(1-\cos 3x)^3}$

e) $\displaystyle e = \lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin(\pi x)}$

c) $\displaystyle c = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1+2\cos x}-1}{x-\frac{\pi}{2}}$

f) $\displaystyle f = \lim_{x\to 0}\frac{[2\sin x-\sin(2x)]^2}{x^6}\,\sin(\tfrac{1}{x^6})\,.$

---

a) On factorise le numérateur pour pouvoir utiliser les IPE au voisinage de $x_0 = 0$.

$$\frac{1-\cos^3 x}{x\,\sin x} = \frac{(1-\cos x)\,(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\,\sin x}.$$

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\,(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\,\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}\,(1+\cos x+\cos^2 x)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{2}\\ &= \frac{3}{2}\,. \end{aligned}$$

b) Lorsque x tend vers 0, x^6 et $3x$ tendent vers 0. Donc

$$\sin\left(x^6\right) \sim x^6 \qquad \text{et} \qquad 1-\cos(3x) \sim \frac{(3x)^2}{2}\,, \qquad \text{au voisinage de } 0\,.$$

$$b = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x^6\right)}{[1-\cos(3x)]^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{\left(\frac{(3x)^2}{2}\right)^3} = \frac{8}{729}\,.$$

c) A l'aide d'un changement de variable, on se ramène dans un voisinage de 0.

En posant $y = x - \frac{\pi}{2}$, on a $x = y + \frac{\pi}{2}$. Et si $x \to \frac{\pi}{2}$, alors $y \to 0$.

$$c = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+2\cos x}-1}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{1+2\cos(y+\frac{\pi}{2})}-1}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{1-2\sin(y)}-1}{y}$$

$\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2\sin(y)}-1}{y}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

On lève cette indétermination en amplifiant le numérateur par son expression conjuguée, puis en utilisant les IPE au voisinage de 0.

$$\frac{\sqrt{1-2\sin(y)}-1}{y} = \frac{[\,1-2\sin(y)\,]-1}{y\,[\,\sqrt{1-2\sin(y)}+1\,]} = \frac{-2\sin(y)}{y\,[\,\sqrt{1-2\sin(y)}+1\,]}\,.$$

Et au voisinage de 0, $\sin y$ et y sont des infiniment petits équivalents :

$$c = \lim_{y\to 0} \frac{-2\sin(y)}{y\,[\,\sqrt{1-2\sin(y)}+1\,]} = \lim_{y\to 0} \frac{-2}{\sqrt{1-2\sin(y)}+1} = -1\,.$$

d) On factorise le numérateur pour pouvoir utiliser les IPE au voisinage de $x_0 = 0$:

$$\frac{1+2\cos x - 3\cos^2 x}{\sin(x^2\sqrt{4-x})} = \frac{(1-\cos x)\,(1+3\cos x)}{\sin(x^2\sqrt{4-x})}\,.$$

Lorsque x tend vers 0, $x^2\sqrt{4-x}$ tend aussi vers 0. Donc

$$\sin(x^2\sqrt{4-x}\,) \sim x^2\sqrt{4-x} \qquad \text{au voisinage de } 0\,.$$

$$d = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\,(1+3\cos x)}{\sin(x^2\sqrt{4-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}\,(1+3\cos x)}{x^2\sqrt{4-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1+3\cos x}{2\,\sqrt{4-x}} = 1\,.$$

e) Là aussi, on se ramène dans un voisinage de 0 à l'aide d'un changement de variable, en posant $y = 1 - x$:

$$y = 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 - y\,, \qquad \text{on a alors} \qquad x \to 1 \quad \Leftrightarrow \quad y \to 0\,.$$

$$e = \lim_{x\to 1} \frac{1 - x^2}{\sin(\pi x)} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)\,(1+x)}{\sin(\pi x)} = \lim_{y\to 0} \frac{y\,(2-y)}{\sin(\pi - \pi y)} = \lim_{y\to 0} \frac{y\,(2-y)}{\sin(\pi y)}\,.$$

Au voisinage de $y = 0$, $\sin(\pi y)$ et πy sont des infiniment petits équivalents :

$$e = \lim_{y\to 0} \frac{y\,(2-y)}{\sin(\pi y)} = \lim_{y\to 0} \frac{y\,(2-y)}{\pi y} = \lim_{y\to 0} \frac{2-y}{\pi} = \frac{2}{\pi}\,.$$

f) La fonction $\sin\left(\frac{1}{x^6}\right)$ n'admet pas de limite lorsque $x \to 0$, mais est bornée.

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{[2\sin x - \sin(2x)]^2}{x^6} \sin\left(\tfrac{1}{x^6}\right)$ existe et vaut 0 si et seulement si

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{[2\sin x - \sin(2x)]^2}{x^6} = 0\,.$ Calculons cette limite.

$$\frac{[\,2\sin x - \sin(2x)\,]^2}{x^6} = \frac{[\,2\sin x - 2\sin x\,\cos x\,]^2}{x^6} = \frac{[\,2\sin x\,(1 - \cos x)\,]^2}{x^6}\,.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\,2\sin x - \sin(2x)\,]^2}{x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{[\,2x\,(\frac{x^2}{2})\,]^2}{x^6} = 1 \neq 0\,.$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{[2\sin x - \sin(2x)]^2}{x^6} \sin\left(\tfrac{1}{x^6}\right)$ n'existe pas.

9. Exercice facultatif.

Soient $f,\, g :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un voisinage épointé de x_0.
Démontrer l'implication suivante :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = b \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to x_0} [\,f(x)\cdot g(x)\,] = a\cdot b\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné, on cherche à déterminer $\delta > 0$ vérifiant

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \Big|\,[\,f(x)\cdot g(x)\,] - (a\cdot b)\,\Big| < \varepsilon\,,$$

sachant que

- $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, c'est à dire que
  $\forall\,\varepsilon_1 > 0\,,\ \exists\,\delta_1 > 0,\ (\delta_1 = \delta_1\,(\varepsilon_1)\,)$ tel que $0 < |x - x_0| < \delta_1 \ \Rightarrow\ |\,f(x) - a\,| < \varepsilon_1\,,$
- $\displaystyle\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, c'est à dire que
  $\forall\,\varepsilon_2 > 0\,,\ \exists\,\delta_2 > 0,\ (\delta_2 = \delta_2\,(\varepsilon_2)\,)$ tel que $0 < |x - x_0| < \delta_2 \ \Rightarrow\ |\,g(x) - b\,| < \varepsilon_2\,.$

On cherche donc à exprimer $\Big| [\, f(x) \cdot g(x) \,] - (a \cdot b) \Big|$ en fonction de $|\, f(x) - a \,|$ et de $|\, g(x) - b \,|$:

$$\begin{aligned} \Big| [\, f(x) \cdot g(x) \,] - (a \cdot b) \Big| &= \Big| [\, f(x) - a \,] \cdot g(x) + [\, g(x) - b \,] \cdot a \Big| \\ &\leq \Big| [\, f(x) - a \,] \cdot g(x) \Big| + \Big| [\, g(x) - b \,] \cdot a \Big| \\ &= \big| f(x) - a \big| \cdot |\, g(x) \,| + \big| g(x) - b \big| \cdot |\, a \,| \end{aligned}$$

Donc pour majorer $\Big| [\, f(x) \cdot g(x) \,] - (a \cdot b) \Big|$ par ε, il suffit, par exemple, de majorer $\big| f(x) - a \big| \cdot |\, g(x) \,|$ et $\big| g(x) - b \big| \cdot |\, a \,|$ par $\frac{\varepsilon}{2}$.

- Majoration de $\big| f(x) - a \big| \cdot |\, g(x) \,|$ par $\frac{\varepsilon}{2}$:
  - $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$ donc $\exists\, \xi > 0$ tel que $0 < |x - x_0| < \xi \;\Rightarrow\; |\, g(x) \,| < |b| + 1$
  - $\big| f(x) - a \big|$ est aussi petit qu'on veut si x est suffisamment proche de x_0 :

$$\exists\, \delta_1 > 0 \quad \text{tel que} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |\, f(x) - a \,| < \frac{\varepsilon}{2\,(|b| + 1)}\,.$$

- Majoration de $\big| g(x) - b \big| \cdot |\, a \,|$ par $\frac{\varepsilon}{2}$:
  - si $a = 0$, $\big| g(x) - b \big| \cdot |\, a \,| = 0 < \frac{\varepsilon}{2}$,
  - si $a \neq 0$, $\exists\, \delta_2 > 0$ tel que $0 < |x - x_0| < \delta_2 \;\Rightarrow\; |\, g(x) - b \,| < \dfrac{\varepsilon}{2\,|a|}$.

- Conclusion :
  - si $a = 0$, pour tout $\delta \leq \min\{\xi\,,\, \delta_1\}$, on a

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

$$\Rightarrow \Big| [\, f(x) \cdot g(x) \,] - (a \cdot b) \Big| \leq \underbrace{\big| f(x) - a \big|}_{< \frac{\varepsilon}{2\,(|b|+1)}} \cdot \underbrace{|\, g(x) \,|}_{< |b| + 1} + \underbrace{\big| g(x) - b \big| \cdot |\, a \,|}_{= 0} < \varepsilon\,.$$

  - si $a \neq 0$, pour tout $\delta \leq \min\{\xi\,,\, \delta_1\,,\, \delta_2\}$, on a

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

$$\Rightarrow \Big| [\, f(x) \cdot g(x) \,] - (a \cdot b) \Big| \leq \underbrace{\big| f(x) - a \big|}_{< \frac{\varepsilon}{2\,(|b|+1)}} \cdot \underbrace{|\, g(x) \,|}_{< |b| + 1} + \underbrace{\big| g(x) - b \big|}_{< \frac{\varepsilon}{2\,|a|}} \cdot |\, a \,| < \varepsilon\,.$$