Corrigé 6

1. Calculer, si elle existe, la limite des suites définies par les termes généraux suivants :

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}+n}{n+3}$, b) $b_n = \sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+a\,n}$, $a \in \mathbb{R}$,

c) $c_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$, d) $d_n = \dfrac{3\,(n+2)!+2\,(n+1)!}{(n+3)!}$,

e) $e_n = (-1)^n \sin(\frac{n\pi}{2})$, f) $f_n = \sqrt{2n}-\sqrt{n+1}$,

g) $g_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^4+1}-(n^2+1)}$.

Remarque : la fonction racine carrée est une fonction "gentille". En d'autres termes, si (u_n) est une suite convergente de termes positifs, on a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} u_n}\ .$$

On dira, par la suite, que la fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$.

a) On lève l'indétermination de type "$\frac{\infty}{\infty}$", en mettant en évidence les termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{|n|\,\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+n}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\,\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+n}{n+3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left[\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right]}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}{1+\frac{3}{n}} = 2\,,$$

car $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\tfrac{1}{n^2}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \left(1+\left[\tfrac{1}{n}\right]^2\right)} = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 3\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$

b) On lève cette indétermination en amplifiant b_n par son conjugué :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+a\,n}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+a\,n}\right] \cdot \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+a\,n}}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+a\,n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1) - (n^2+a\,n)}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+a\,n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - a\,n}{|n|\,\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + |n|\,\sqrt{1+\frac{a}{n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\frac{1}{n} - a\right)}{n\left[\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{a}{n}}\right]} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - a}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{a}{n}}} \\
&= -\frac{a}{2}\,,
\end{aligned}$$

car $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left[\frac{1}{n}\right]^2\right)} = 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{a}{n}} = 1\,, \quad \forall a \in \mathbb{R}\,.$

c) Voici une première approche qui n'aboutit pas.

$$c_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} = \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+1}\,.$$

Chaque terme converge vers 0 :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+n+1} = 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2+n+1} = 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+n+1} = 0\,.$$

Mais lorsque $n \to \infty$, le nombre de termes de la somme tend vers l'infini.

On ne peut donc rien conclure quant à la convergence de la suite (c_n) ni de son éventuelle limite.

C'est l'expression du terme général c_n qui pose problème. Essayons de réécrire son numérateur de façon plus concise :

$$1+2+\cdots+n = \frac{n\,(n+1)}{2}\,,$$

$$c_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} = \frac{\frac{n\,(n+1)}{2}}{n^2+n+1} = \frac{n\,(n+1)}{2\,(n^2+n+1)}\,.$$

Puis on met en évidence, au numérateur et au dénominateur, la plus haute puissance de n :

$$c_n = \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{2}\,.$$

d) On simplifie l'expression du terme général d_n, en remarquant que

$$(n+2)! = (n+2)\,(n+1)! \qquad \text{et} \qquad (n+3)! = (n+3)\,(n+2)\,(n+1)!$$

$$d_n = \frac{3\,(n+2)! + 2\,(n+1)!}{(n+3)!} = \frac{3\,(n+2)\,(n+1)! + 2\,(n+1)!}{(n+3)\,(n+2)\,(n+1)!}$$

$$d_n = \frac{3\,(n+2)+2}{(n+3)\,(n+2)} = \frac{3n+8}{n^2+5n+6} = \frac{1}{n}\cdot\frac{3+\frac{8}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}\,.$$

D'où $\displaystyle \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{3+\frac{8}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{8}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}} = 0\,.$

e) Calcul des premiers termes de la suite :

$$e_1 = -1\,,\quad e_2 = 0\,,\quad e_3 = +1\,,\quad e_4 = 0\,,\quad e_5 = -1\,,\quad e_6 = 0\,,$$

$$e_7 = +1\,,\quad e_8 = 0\,,\quad e_9 = -1\,,\quad e_{10} = 0\,,\quad e_{11} = +1\,,\quad \cdots$$

$$e_n = (-1)^n \sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad n = 4k+1 \\ \ \ 0 & \text{si} \quad n = 2k+2 \\ +1 & \text{si} \quad n = 4k+3 \end{cases} \qquad k\in\mathbb{N}\,.$$

Cette suite diverge.

En effet supposons que la suite (e_n) converge vers une limite $e\in\mathbb{R}$. Alors pour un ε donné, par exemple $\varepsilon = \frac{1}{4}$, tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang, doivent être dans l'intervalle $]\,e-\varepsilon\,;\,e+\varepsilon\,[$. Or cet intervalle (quel que soit e) est de longueur $\frac{1}{2}$, il ne peut pas contenir simultanément les valeurs -1, 0 et $+1$.

f) Les coefficients de n étant différents, on lève cette indétermination en mettant $\sqrt{n}$ en évidence.

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{2n}-\sqrt{n+1}\right] = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,\left[\sqrt{2}-\sqrt{1+\tfrac{1}{n}}\right] = +\infty\,.$$

car $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = +\infty$ et $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{2}-\sqrt{1+\tfrac{1}{n}}\right] = \sqrt{2}-1 > 0\,.$

g) On lève cette indétermination en amplifiant g_n par le conjugué de son dénominateur.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} g_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+1}-(n^2+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+1}-(n^2+1)} \cdot \frac{\sqrt{n^4+1}+(n^2+1)}{\sqrt{n^4+1}+(n^2+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left[\sqrt{n^4+1}+(n^2+1)\right]}{(n^4+1)-(n^2+1)^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left[\sqrt{n^4+1}+(n^2+1)\right]}{-2n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+1}+(n^2+1)}{-2n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left[\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+(1+\frac{1}{n^2})\right]}{-2n} \\
&= \lim_{n\to\infty} -\frac{n}{2}\cdot\left[\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+(1+\frac{1}{n^2})\right] \\
&= -\infty\,,
\end{aligned}$$

car $\displaystyle\lim_{n\to\infty} -\frac{n}{2} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+(1+\frac{1}{n^2})\right] = 2 > 0\,.$

2. A l'aide du théorème des deux gendarmes, étudier la convergence des suites suivantes.

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}\,,\quad n\in\mathbb{N}^*\,,$

b) $b_n = \dfrac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{(n+1)^2}\,,\quad n\in\mathbb{N}^*\,,$

c) $c_n = \dfrac{n^2}{n^3+3n+1}+\dfrac{n^2+1}{n^3+3n+2}+\dfrac{n^2+2}{n^3+3n+3}+\cdots+\dfrac{n^2+2n-1}{n^3+5n}\,,\quad n\in\mathbb{N}^*.$

---

a) On cherche à encadrer la suite (a_n) par deux "suites-gendarmes" qui convergent vers la même limite.

On utilise la croissance de la fonction $\sqrt{x}$ pour encadrer $\sqrt{n^2+1}$:

$$\frac{\sqrt{n^2}}{n} \le \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} \le \frac{\sqrt{n^2+2n+1}}{n} \quad\Leftrightarrow\quad 1 \le \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} \le \frac{n+1}{n}$$

$$1 \le \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} \le 1+\frac{1}{n} \quad\text{or}\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 \quad\text{donc}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = 1\,.$$

b) On se sert de l'encadrement du sinus pour minorer et majorer b_n :

$$-1 \leq \sin(\tfrac{n\pi}{2}) \leq +1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{(n+1)^2} \leq +\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad -\left(\frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{(n+1)^2} \leq +\left(\frac{1}{n}\right)^2 .$$

Or $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 = 0$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{(n+1)^2} = 0$.

c) On va majorer c_n en majorant chaque terme de la somme par des termes identiques. On pourra minorer c_n de façon analogue.

On constate que c_n est une somme de $2n$ termes.

- Majoration de c_n

  On majore chaque terme de la somme en majorant le numérateur et en minorant le dénominateur :

$$c_n = \underbrace{\frac{n^2}{n^3+3n+1}}_{\leq \frac{n^2+2n-1}{n^3+3n+1}} + \underbrace{\frac{n^2+1}{n^3+3n+2}}_{\leq \frac{n^2+2n-1}{n^3+3n+1}} + \cdots + \underbrace{\frac{n^2+2n-1}{n^3+5n}}_{\leq \frac{n^2+2n-1}{n^3+3n+1}} \leq 2n \cdot \frac{n^2+2n-1}{n^3+3n+1} .$$

- Minoration de c_n

  On minore chaque terme de la somme en minorant le numérateur et en majorant le dénominateur :

$$c_n = \underbrace{\frac{n^2}{n^3+3n+1}}_{\geq \frac{n^2}{n^3+5n}} + \underbrace{\frac{n^2+1}{n^3+3n+2}}_{\geq \frac{n^2}{n^3+5n}} + \cdots + \underbrace{\frac{n^2+2n-1}{n^3+5n}}_{\geq \frac{n^2}{n^3+5n}} \geq 2n \cdot \frac{n^2}{n^3+5n} .$$

On obtient deux suites qui encadrent (c_n), vérifions qu'elles convergent vers la même valeur :

- $\lim\limits_{n\to\infty} 2n \cdot \frac{n^2+2n-1}{n^3+3n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3}{n^3} \cdot \frac{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} = 2 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} = 2$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} 2n \cdot \frac{n^2}{n^3+5n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3}{n^3} \cdot \frac{1}{1+\frac{5}{n}} = 2 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{5}{n}} = 2$.

On en déduit donc que (c_n) converge et que $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 2$.

3. Etudier la convergence de la suite (a_n) définie par son terme général $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$.

On détermine les premiers termes de cette suite et on observe si elle semble converger ou diverger.

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1!}{2^1} = \frac{1}{2} \\
a_2 &= \frac{2!}{2^2} = \frac{1\cdot 2}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2} = a_1\cdot\frac{2}{2} \\
a_3 &= \frac{3!}{2^3} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{2} = a_2\cdot\frac{3}{2} \\
a_4 &= \frac{4!}{2^4} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{2} = a_3\cdot\frac{4}{2} \\
\ldots \\
a_n &= \frac{n!}{2^n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n}{2} = a_{n-1}\cdot\frac{n}{2}
\end{aligned}$$

Cette suite semble diverger car $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2} = +\infty$.

On le démontre en utilisant le "théorème du gendarme".

On montre que la suite (a_n) tend vers $+\infty$ en la minorant par une suite qui diverge vers $+\infty$.

$$a_n = \frac{n!}{2^n} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n-1}{2}\right)\cdot\frac{n}{2} \geq \frac{n}{4}, \quad \text{car} \quad \frac{2}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n-1}{2} \geq 1 \quad (n\geq 3)\,.$$

Or $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{4} = +\infty$, donc, d'après le "théorème du gendarme", $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

4. Montrer à l'aide de la définition de la limite infinie que $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^2 - 10n\right] = +\infty$.

Pour montrer que la suite $(n^2 - 10n)$ diverge vers $+\infty$ lorsque n tend vers ∞ , il faut être capable, pour un $A > 0$ donné, d'exhiber un seuil $N \in \mathbb{N}^*$ qui dépend de A tel que

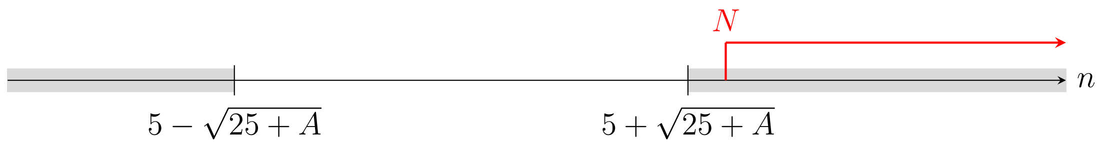
$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad n^2 - 10n > A$$

Le point de départ est donc la contrainte définie par A , à savoir : $n^2 - 10n > A$:

$$n^2 - 10n - A > 0 \quad \Leftrightarrow \quad n \in \left]-\infty\,, 5-\sqrt{25+A}\right[\;\cup\; \left]5+\sqrt{25+A}\,, +\infty\right[.$$

On choisit le seuil N de sorte que si $n \geq N$, on ait

$$n \in \left]-\infty\,, 5-\sqrt{25+A}\right[\;\cup\; \left]5+\sqrt{25+A}\,, +\infty\right[.$$



Il suffit de choisir $N > 5 + \sqrt{25 + A}$. En effet

$$n \geq N \quad (\text{avec } N > 5 + \sqrt{25 + A}) \quad \Rightarrow \quad n^2 - 10n > A\,.$$

5. Soit (a_n) une suite. Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, justifier. Si elle est fausse, donner un contre-exemple.

a) Si (a_n) n'est pas bornée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$.

b) Soit (b_n) une suite telle que $b_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = l$ pour $l \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$.

c) Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, alors $a > 0$.

d) Soit $a \in \mathbb{R}$. Si (a_n) ne converge pas vers a, alors il existe $\epsilon > 0$ et une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $a_n \notin]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.

---

a) Faux. Considérer par exemple la suite (a_n) donnée par :

$$(a_n) : 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6, 0, 7, ...$$

La suite est non bornée, cependant la suite ne diverge pas à l'infini. En effet, soit $A > 0$. Si (a_n) diverge à l'infini, seul au plus un nombre fini de a_n est tel que $a_n \leq A$. Or on a $a_{2k} = 0 < A$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

b) Faux. Considérer par exemple les suites $a_n = \frac{1}{n}$ et $b_n = \frac{2}{n}$. On a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, mais

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\frac{n}{2} = \frac{1}{2}.$$

c) Faux. Considérer par exemple la suite (a_n) donnée par $a_n = \frac{1}{n}$. On a bien $a_n > 0$ pour tout n, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

d) Vrai. En effet on a l'équivalence

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \neq a \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall N \in \mathbb{N}^* \text{ il existe } n \geq N \text{ tel que } |a_n - a| > \varepsilon.$$

Autrement dit il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout rang N, il existe $n \geq N$ avec $a_n \notin]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$. Soit donc N un rang quelconque, il existe alors $n_1 \geq N$ tel que $a_{n_1} \notin]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$. En réitérant le processus avec $N = n_1 + 1$, on trouve $n_2 \geq n_1 + 1 > n_1$ tel que $a_{n_2} \notin]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$. Finalement, on peut donc construire une suite d'entiers $n_1, n_2, n_3, ...$ tous différents tels que $a_{n_k} \notin]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

6. Exercice facultatif

Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes. Démontrer l'implication suivante :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b\,.$$

Pour montrer que $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$, il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on est capable d'exhiber un seuil N qui dépend de ε tel que

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |\,(a_n + b_n) - (a + b)\,| < \varepsilon\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné, on cherche donc à déterminer N sachant que

- $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, c'est à dire que

  $\forall\, \delta_1 > 0\,, \quad \exists\, N_a \in \mathbb{N}^*,\ (N_a = N_a\,(\delta_1)\,) \quad \text{tel que} \quad n \geq N_a \quad \Rightarrow \quad |\,a_n - a\,| < \delta_1\,,$

- $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, c'est à dire que

  $\forall\, \delta_2 > 0\,, \quad \exists\, N_b \in \mathbb{N}^*,\ (N_b = N_b\,(\delta_2)\,) \quad \text{tel que} \quad n \geq N_b \quad \Rightarrow \quad |\,b_n - b\,| < \delta_2\,.$

Or $|\,(a_n + b_n) - (a + b)\,| \;=\; |\,(a_n - a) + (b_n - b)\,| \;\leq\; |\,a_n - a\,| + |\,b_n - b\,|\,.$

Donc pour majorer $|\,(a_n + b_n) - (a + b)\,|$ par ε, il suffit, par exemple, de majorer $|\,a_n - a\,|$ et $|\,b_n - b\,|$ par $\frac{\varepsilon}{2}$.

Ceci est possible si n est assez grand, en effet :

- $n \geq N_a\,(\frac{\varepsilon}{2}) \quad \Rightarrow \quad |\,a_n - a\,| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$
- $n \geq N_b\,(\frac{\varepsilon}{2}) \quad \Rightarrow \quad |\,b_n - b\,| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$

Donc tout $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N \geq \max\big(N_a\,(\frac{\varepsilon}{2})\,,\, N_b\,(\frac{\varepsilon}{2})\big)$ convient, car

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |\,(a_n + b_n) - (a + b)\,| \;\leq\; \underbrace{|\,a_n - a\,|}_{<\,\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|\,b_n - b\,|}_{<\,\frac{\varepsilon}{2}} \;<\; \varepsilon\,.$$
