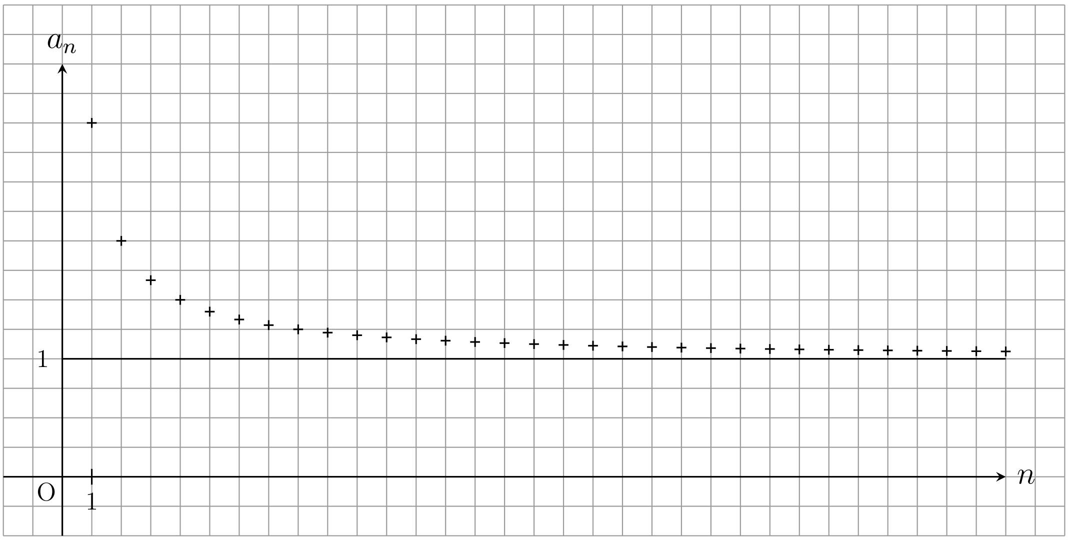
Corrigé 5

1. Voici la représentation de la suite définie par $a_n = \dfrac{n+2}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.



a) Soit $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |a_n - 1| < \varepsilon$.

Déterminer graphiquement $N(\varepsilon)$ dans les trois cas suivants :

i) $\varepsilon = \frac{1}{2}$, ii) $\varepsilon = \frac{1}{4}$, iii) $\varepsilon = \frac{1}{8}$.

b) Démontrer à l'aide de la définition de la limite d'une suite que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

---

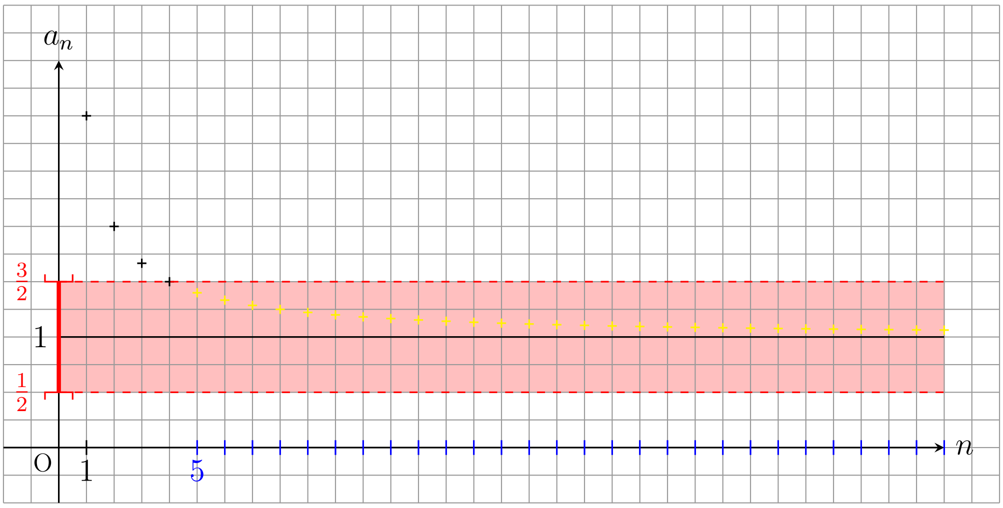
a) Détermination graphique de N en fonction de ε .

Il s'agit de traduire la contrainte "verticale" donnée, celle qui concerne les a_n , en une contrainte "horizontale", celle qui concerne les rangs n .

ε est donné. Il définit un $\varepsilon-$voisinage de $a = 1$.

- Représenter cet $\varepsilon-$voisinage sur l'axe des a_n .
- Déterminer les termes de la suite (a_n) qui appartiennent à cet $\varepsilon-$voisinage.
- Puis en déduire un seuil N à partir duquel tous les termes a_n , $n \geq N$ sont dans l' $\varepsilon-$voisinage de $a = 1$.

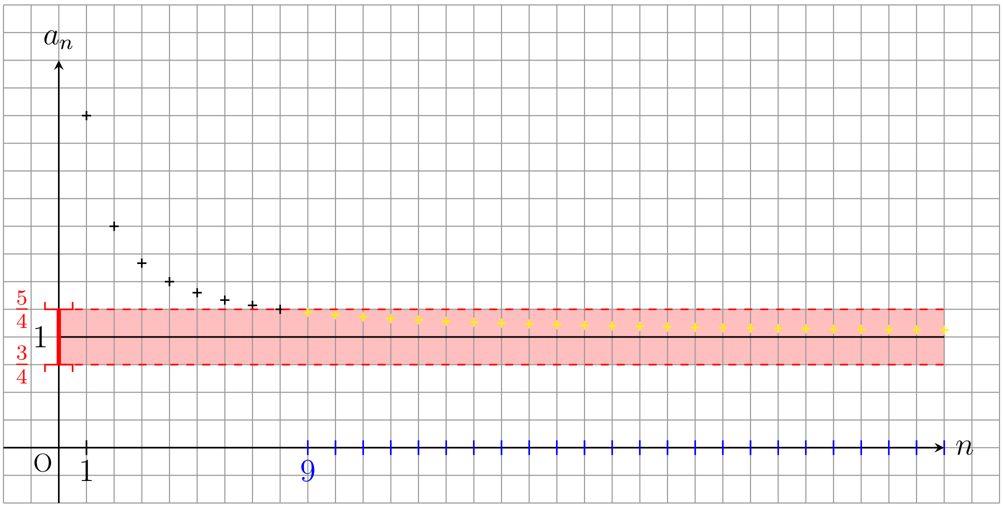
$\varepsilon = \frac{1}{2}$:



Si $n \geq 5$ alors $a_n \in]\,\frac{1}{2}\,,\,\frac{3}{2}\,[$. Donc tout $N \geq 5$ convient.

En effet : $n \geq N \geq 5 \quad \Rightarrow \quad |a_n - 1| < \frac{1}{2}$.

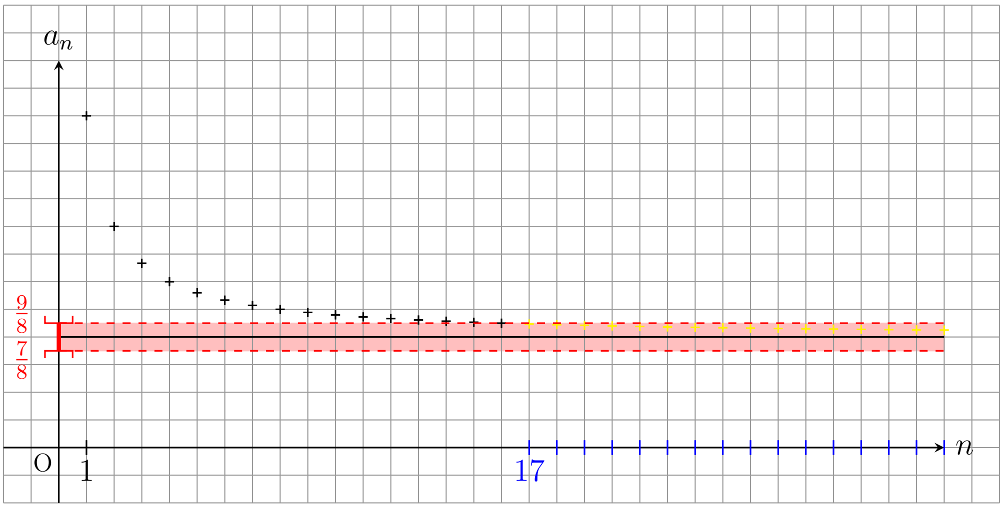
$\varepsilon = \frac{1}{4}$:



Si $n \geq 9$ alors $a_n \in]\,\frac{3}{4}\,,\,\frac{5}{4}\,[$. Donc tout $N \geq 9$ convient.

En effet : $n \geq N \geq 9 \quad \Rightarrow \quad |a_n - 1| < \frac{1}{4}$.

$\varepsilon = \frac{1}{8}$:



Si $n \geq 17$ alors $a_n \in]\,\frac{7}{8}\,,\,\frac{9}{8}\,[$. Donc tout $N \geq 17$ convient.

En effet : $n \geq N \geq 17 \quad \Rightarrow \quad |a_n - 1| < \frac{1}{8}$.

b) Soit $\varepsilon > 0$ donné.

Pour montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, il faut être capable d'exhiber un seuil $N \in \mathbb{N}^*$ de sorte que

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |\, a_n - 1\,| < \varepsilon\,.$$

Le point de départ est donc la contrainte définie par ε et le point d'arrivée doit être une contrainte qui concerne le rang n.

$$|\, a_n - 1\,| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{n+2}{n} - 1\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{2}{n}\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{2}{\varepsilon}\,,$$

car $n > 0$.

Donc tout $N > \dfrac{2}{\varepsilon}$ convient, car $n \geq N$ (avec $N > \frac{2}{\varepsilon}$) $\Rightarrow$ $|\, a_n - 1\,| < \varepsilon$.

2. On considère la suite (a_n) définie par son terme général $a_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\,,\quad n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que (a_n) converge vers $a = 1$.

Soit $\varepsilon > 0$ donné, montrons qu'il existe un $N \in \mathbb{N}^*$ qui dépend de ε tel que

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - 1| < \varepsilon\,.$$

ε est le paramètre du problème et le rang n qui définit le seuil N en est la variable. On cherche donc à résoudre l'inéquation $|a_n - 1| < \varepsilon$ par rapport à la variable n en fonction de ε :

$$\begin{aligned}
|a_n - 1| < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \left| \sqrt{1+\tfrac{1}{n}} - 1 \right| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{1+\tfrac{1}{n}} - 1 < \varepsilon \,, \qquad \text{car} \quad \sqrt{1+\tfrac{1}{n}} > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{1+\tfrac{1}{n}} < 1+\varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{n} < (1+\varepsilon)^2 \,, \qquad \text{car} \quad 1+\varepsilon \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} < 2\,\varepsilon + \varepsilon^2 \\
&\Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{2\,\varepsilon+\varepsilon^2} \,, \qquad \text{car les deux membres sont positifs.}
\end{aligned}$$

Donc tout $N > \dfrac{1}{2\,\varepsilon+\varepsilon^2}$ convient. En effet,

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad n > \frac{1}{2\,\varepsilon+\varepsilon^2} \quad \Rightarrow \quad |a_n - 1| < \varepsilon \,.$$

3. Soient (a_n) une suite et $l \in \mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes, déterminer lesquelles sont équivalentes à

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l.$$

Quand ce n'est pas le cas, s'en convaincre en exhibant un contre-exemple.

a) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*,$ tel que $n \geq N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |a_n - l| < \varepsilon.$

b) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*,$ tel que $n \geq N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |a_n - l| \leq \varepsilon.$

c) $\forall \varepsilon \geq 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*,$ tel que $n \geq N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |a_n - l| < \varepsilon.$

d) $\exists N \in \mathbb{N}^*,$ tel que $\forall \varepsilon > 0,\ n \geq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - l| < \varepsilon.$

e) $\forall N \in \mathbb{N}^*, \exists \varepsilon > 0$ tel que $n \geq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - l| < \varepsilon.$

---

a) C'est la définition de suite convergente vue en cours.

b) Cette affirmation est équivalente à la précédente. En effet, il est clair l'affirmation (a) implique la (b).

Si l'affirmation (b) est vraie, on peut pour un $\varepsilon > 0$ donné trouver un nombre naturel $N(\varepsilon/2)$, tel que $n \geq N(\varepsilon/2)$ implique $|a_n - l| \leq \varepsilon/2$. Pour de tels n on aura alors $|a_n - l| < \varepsilon$, ce qui est l'affirmation (a), c'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$.

c) Ici on a le droit de choisir $\varepsilon = 0$. Mais alors $|a_n - l| < \varepsilon$ ne peut être vérifié par aucune suite (aucun nombre positif ne peut être strictement plus petit que zéro). C'est donc une affirmation absurde.

d) Cette affirmation nous dit qu'il existe un rang N à partir duquel $|a_n - l| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ choisi. Cela correspond donc à dire qu'à partir de ce rang N on doit avoir $|a_n - l| = 0$. Autrement dit, cette affirmation dit que la suite (a_n) est constante et égale à l à partir de N.

On a donc bien que $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ mais la réciproque n'est pas vraie. Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$, en général la suite n'est pas constante égale à l à partir d'un certain rang. En effet, prenons par exemple $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$. On a bien que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, mais $a_n \neq 0$ pour tout n.

e) Le contre-exemple suivant montre que cette affirmation n'exprime pas la convergence de (a_n) vers l : si $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et si $l = 0$, on peut en effet satisfaire cette affirmation en choisissant $\varepsilon = 2 > 0$. Un tel epsilon existe donc, mais la limite de (a_n) n'est sûrement pas 0.

4. Montrer que les suites ci-dessous sont majorées en exhibant un majorant.

a) $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$

b) $b_n = \frac{n^2+n}{n^2+1}, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$

c) $c_n = \frac{n+3}{n^2+1} + \frac{n+4}{n^2+1} + \cdots + \frac{2n+2}{n^2+1}, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$
Indication : combien y a-t-il de termes dans la somme ?

d) $d_n = \frac{n+3}{n^2+1} + \frac{n+4}{n^2+2} + \cdots + \frac{2n+2}{n^2+n}, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$

---

a) On observe que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n^2 < n^2 + 1$. Par conséquent

$$a_n = \frac{n^2}{n^2+1} < 1.$$

On peut donc choisir $M = 1$ comme majorant.

b) On ne peut établir que $n^2 + n < n^2 + 1$. Cependant, en "cassant" la fraction, on peut écrire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$b_n = \frac{n^2+n}{n^2+1} = \underbrace{\frac{n^2}{n^2+1}}_{<1} + \underbrace{\frac{n}{n^2+1}}_{<1} < 2.$$

On peut par conséquent choisir $M = 2$ comme majorant.

c) On observe que c_n est une somme de n termes. Lorsque n devient grand, chaque terme devient petit, mais le nombre de termes est grand. Que devient la somme c_n ? Chaque terme est plus grand que son précédent, par conséquent chaque terme est plus petit que $\frac{2n+2}{n^2+1}$. La somme c_n est donc plus petite que le nombre de termes multiplié par $\frac{2n+2}{n^2+1}$, donc

$$c_n \leq n\frac{2n+2}{n^2+1} \leq \frac{2n^2+2n}{n^2+1} \leq 2\underbrace{\frac{n^2}{n^2+1}}_{<1} + 2\underbrace{\frac{n}{n^2+1}}_{<1} < 4.$$

On peut par conséquent choisir $M = 4$.

d) On observe que d_n est une somme de n termes. Comment au point précédent, lorsque n devient grand, chaque terme devient petit, mais le nombre de termes est grand. Que devient la somme d_n ?

Pour majorer la suite (d_n), on peut chercher à majorer chaque terme de d_n par n termes identiques :

$$d_n = \underbrace{\frac{n+3}{n^2+1}}_{\leq u_n} + \underbrace{\frac{n+4}{n^2+2}}_{\leq u_n} + \cdots + \underbrace{\frac{2n+2}{n^2+n}}_{\leq u_n} \leq n \cdot u_n\,.$$

On peut majorer chaque fraction de cette somme en majorant le numérateur par le plus grand des numérateurs et en minorant le dénominateur par le plus petit des dénominateurs :

$$u_n = \frac{2n+2}{n^2+1}\,, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

$$d_n = \underbrace{\frac{n+3}{n^2+1}}_{\leq \frac{2n+2}{n^2+1}} + \underbrace{\frac{n+4}{n^2+2}}_{\leq \frac{2n+2}{n^2+1}} + \cdots + \underbrace{\frac{2n+2}{n^2+n}}_{\leq \frac{2n+2}{n^2+1}} \leq n \cdot \frac{2n+2}{n^2+1} = \frac{2n^2+2n}{n^2+1}\,.$$

Or on sait par le point précédent que :

$$\frac{2n^2+2n}{n^2+1} = 2\,\underbrace{\frac{n^2}{n^2+1}}_{<1} + 2\,\underbrace{\frac{n}{n^2+1}}_{<1} < 2+2 = 4\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

En résumé :

$$d_n \leq \frac{2n^2+2n}{n^2+1} < 4\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*. \quad M = 4 \text{ est un majorant de la suite } (d_n)\,.$$

5. a) Soit $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$. On considère la suite

$$1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, \ldots$$

Soit (A_n) définie par

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} r^k,$$

c'est-à-dire, A_n est la somme des premiers n termes de la suite ci-dessus. Montrer par récurrence que

$$A_n = \frac{1-r^n}{1-r}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

b) On considère la suite $1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$ d'entiers naturels impairs. Soit A_n la somme des premiers n termes de cette suite. Montrer par récurrence que

$$A_n = n^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a)
- Vérification pour $n = 1$:

$$A_1 = \sum_{k=0}^{0} r^k = r^0 = 1 = \frac{1-r^1}{1-r}$$

La formule est donc valable pour $n = 1$.

- Démonstration du pas de récurrence:
On part de l'hypothèse $A_n = \frac{1-r^n}{1-r}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné, et on veut atteindre la conclusion $A_{n+1} = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$. On a

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} r^k \\
&= \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-1} r^k\right)}_{A_n} + r^n \\
&= \frac{1-r^n}{1-r} + r^n \qquad \text{(par l'hypothèse)} \\
&= \frac{1-r^n}{1-r} + \frac{r^n(1-r)}{1-r} \\
&= \frac{1-r^n+r^n-r^{n+1}}{1-r} \\
&= \frac{1-r^{n+1}}{1-r}
\end{aligned}$$

On a donc montré la conclusion.

- Comme la formule est valable pour $n = 1$, et on a montré que si elle est valable pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors elle est valable pour $n+1$, on a donc bien montré par récurrence qu'elle est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Remarquons que la suite d'entiers naturels impairs (a_n) est définie par $a_n = 2n-1$. Ainsi,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (2k-1).$$

- Vérification pour $n = 1$:

$$A_1 = \sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$$

La formule est donc valable pour $n = 1$.

- Démonstration du pas de récurrence:
On part de l'hypothèse $A_n = n^2$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné, et on veut atteindre

la conclusion $A_{n+1} = (n+1)^2$. On a

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) \\
&= \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right)}_{A_n} + 2(n+1) - 1 \\
&= n^2 + 2(n+1) - 1 \qquad \text{(par l'hypothèse)} \\
&= n^2 + 2n + 1 \\
&= (n+1)^2
\end{aligned}$$

On a donc montré la conclusion.

- Comme la formule est valable pour $n = 1$, et on a montré que si elle est valable pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors elle est valable pour $n+1$, on a donc bien montré par récurrence qu'elle est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. On considère la suite (a_n) définie par récurrence de la façon suivante :

$$a_{n+1} \;=\; 3 - \frac{2}{a_n}\,, \qquad a_1 = 3\,, \qquad n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Déterminer le terme général de la suite (a_n), puis démontrer ce résultat par récurrence.

Calcul des premiers termes de la suite

$$a_1 \;=\; 3\,, \qquad a_2 \;=\; \frac{7}{3}\,, \qquad a_3 \;=\; \frac{15}{7}\,, \qquad a_4 \;=\; \frac{31}{15}\,, \qquad a_5 \;=\; \frac{63}{31}\,, \;\cdots$$

Conjecture de l'expression du terme général

- Soit b_n le numérateur de a_n. Il semble que $a_n = \dfrac{b_n}{b_{n-1}}$, $n \geq 2$.
- $(b_{n+1} - b_n)$ n'est pas constant, donc l'expression de b_n est non linéaire en n.
- $(b_{n+1} - b_n)$ est de croissance forte, donc l'expression de b_n n'est pas quadratique en n.
- $(b_{n+1} - b_n)$ est une puissance de 2, donc b_n s'écrit à l'aide d'une puissance de 2 :
$$b_n = 2^{n+1} - 1\,.$$
- Conjecture : $\quad a_n = \dfrac{2^{n+1}-1}{2^n - 1}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*.$

Démonstration par récurrence de la conjecture

$$a_n = \frac{2^{n+1}-1}{2^n-1}\,, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

- Vérification pour $n = 1$.

$$a_1 = 3 \qquad \text{et} \qquad \left.\frac{2^{n+1}-1}{2^n-1}\right|_{n=1} = 3\,.$$

- Démonstration du pas de récurrence.
  - Hypothèse : $a_n = \dfrac{2^{n+1}-1}{2^n-1}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné.
  - Conclusion : $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}-1}$.
  - Preuve : $a_{n+1} \;=\; 3 - \dfrac{2}{a_n} = 3 - 2\cdot\dfrac{2^n-1}{2^{n+1}-1} = \dfrac{3\,(2^{n+1}-1)-2\,(2^n-1)}{2^{n+1}-1}$

$$= \frac{3\cdot 2^{n+1}-3-2^{n+1}+2}{2^{n+1}-1} = \frac{2\cdot 2^{n+1}-1}{2^{n+1}-1} = \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}-1}\,.$$

7. a) Donner un exemple de suites (a_n) et (b_n) telles que la somme (a_n+b_n) est une suite constante, mais pour lesquelles (a_n) et (b_n) ne sont pas constantes.

b) Montrer que si (a_n) et (b_n) sont bornées, alors la suite $(a_n\cdot b_n)$ est bornée.

c) Donner un exemple de suites (a_n) et (b_n) telles que $(a_n\cdot b_n)$ est bornée, mais pour lesquelles ni la suite (a_n) est bornée ni la suite (b_n) est bornée.

d) Donner un exemple de suites (a_n) et (b_n) telles que (a_n) est strictement croissante,(b_n) est strictement décroissante et $a_1 < b_1$, mais telles qu'il n'existe aucun $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $b_n < a_n$.

---

a) On peut par exemple prendre les suites données par $a_n = n$ et $b_n = -n$. On a bien que $a_n + b_n = n - n = 0$ pour tout n, mais ni (a_n) ni (b_n) n'est constante.

b) En effet si (a_n) et (b_n) sont bornées, alors il existe $M_a, M_b \geq 0$ tels que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$|a_n| \leq M_a \text{ et } |b_n| \leq M_b.$$

Par conséquent, on a

$$|a_n\cdot b_n| = |a_n|\cdot|b_n| \leq M_a\cdot M_b.$$

La suite $(a_n\cdot b_n)$ est donc bornée.

c) On peut par exemple prendre les suites données par :

$$(a_n) : 1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, 9, 0, 11, ...$$
$$(b_n) : 0, 2, 0, 4, 0, 6, 0, 8, 0, 10, 0, ...$$

Ni (a_n) ni (b_n) n'est bornée (car elles ne sont pas majorées), pourtant la suite $(a_n \cdot b_n)$ est bornée puisqu'elle est la suite constante zéro.

d) On peut par exemple prendre la suite $a_n = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$ et la suite $b_n = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$. La suite (a_n) est donnée par

$$(a_n) : 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...$$

et (b_n) par

$$(b_n) : 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, ...$$

(a_n) est strictement croissante et (b_n) est strictement décroissante, pourtant on a

$$a_n < 1 < b_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

et donc

$$a_n < b_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

8. Exercice facultatif

[Voir l'Exemple 2 du `Chapitre_2_sec_1_suites_introduction.pdf` des slides du cours sur Moodle pour la définition de fraction continue, ainsi qu'un exemple.]

Déterminer une fraction continue qui décrit $\sqrt{5}$. Calculer les premiers termes de la suite associée à cette fraction continue. Puis définir cette suite par récurrence.

$$x = \sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 5 \quad \text{et} \quad x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4 = 1 \quad \text{et} \quad x > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-2)(x+2) = 1 \quad \text{et} \quad x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 + \frac{1}{2+x} \quad \text{et} \quad x > 0\,.$$

Et en exprimant x dans la fraction par son expression, on obtient :

$$x = 2 + \frac{1}{2 + \left[2 + \dfrac{1}{2+x}\right]} = 2 + \frac{1}{4 + \dfrac{1}{2+x}}\,.$$

Et encore :

$$x = 2 + \frac{1}{4 + \dfrac{1}{2 + \left[2 + \dfrac{1}{2+x}\right]}} = 2 + \frac{1}{4 + \dfrac{1}{4 + \dfrac{1}{2+x}}}\,.$$

Et ainsi de suite : $$x = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}\,.$$

Les premiers termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par cette fraction continue sont :

$$x_1 = 2\,, \qquad x_2 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}\,, \qquad x_3 = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4}} = 2 + \frac{1}{\frac{17}{4}} = 2 + \frac{4}{17} = \frac{38}{17}\,,$$

$$x_4 = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4+\frac{1}{4}}} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{4}{17}} = 2 + \frac{17}{72} = \frac{161}{72}\,.$$

On calcule ces premiers termes plus facilement en déduisant le suivant à partir du précédent :

$$x_1 = 2\,, \qquad x_2 = 2 + \frac{1}{2+2} = 2 + \frac{1}{2+x_1}\,, \qquad x_3 = 2 + \frac{1}{2+2+\frac{1}{2+2}} = 2 + \frac{1}{2+x_2}\,,$$

$$x_4 = 2 + \frac{1}{2+2+\frac{1}{2+2+\frac{1}{2+2}}} = 2 + \frac{1}{2+x_3}\,, \ \cdots\cdots\ ,\ x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2+x_n}\,, \quad n\in\mathbb{N}^*.$$

Par exemple : $$x_5 = 2 + \frac{1}{2+x_4} = 2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{161}{72}} = 2 + \frac{72}{305} = \frac{682}{305}\,.$$