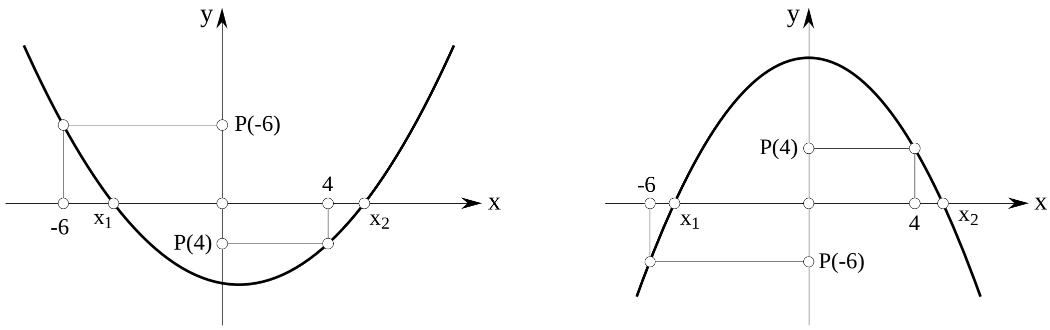
Corrigé 4

1. On considère l'équation : $(m-1)\,x^2 - 2\,(m+1)\,x + 2m - 1 = 0$.

Pour quelles valeurs de m cette équation admet-elle deux racines x_1 et x_2 vérifiant la relation : $-6 < x_1 < 4 < x_2$?

Soit $P(x) = (m-1)\,x^2 - 2\,(m+1)\,x + 2m - 1$.

Si $m-1 \neq 0$, la courbe définie par $y = P(x)$ est une parabole d'axe vertical dont la concavité dépend du signe du coefficient de x^2.



$m-1>0$ $\qquad\qquad$ $m-1<0$

Exploitons les conditions imposées.

a) $P(x)$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 : $\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \text{et} \\ \Delta > 0 \end{cases}$

b) i) -6 est en dehors de l'intervalle $[\,x_1\,,\,x_2\,]$, donc $P(-6)$ et $(m-1)$ sont de même signe.

ii) 4 est dans l'intervalle $]\,x_1\,,\,x_2\,[$, donc $P(4)$ et $(m-1)$ sont de signes contraires.

En résumé : $\begin{cases} (m-1)\cdot P(-6) > 0 & \text{i)} \\ \text{et} & \\ (m-1)\cdot P(4) < 0 & \text{ii)} \end{cases}$

a) $\Delta = 4\,(m+1)^2 - 4\,(m-1)\,(2m-1) = -4\,m\,(m-5)$.

$\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in\,]\,0\,,\,5\,[$.

D'où $S_{\text{a}} = \,]\,0\,,\,1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,5\,[$.

b) i) $P(-6) = 25\,(2m-1)\,.$

$(m-1)\cdot P(-6) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 25\,(2m-1)\,(m-1) > 0\,.$

$S_{\text{i}} = \,]-\infty\,,\,\frac{1}{2}\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[\,.$

ii) $P(4) = 5\,(2m-5)\,.$

$(m-1)\cdot P(4) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5\,(2m-5)\,(m-1) < 0\,.$

$S_{\text{ii}} = \,]\,1\,,\,\frac{5}{2}\,[\,.$

$S_{\text{b}} = S_{\text{i}} \,\cap\, S_{\text{ii}} = \,]\,1\,,\,\frac{5}{2}\,[\,.$

$S = S_{\text{a}} \,\cap\, S_{\text{b}} = \,]\,1\,,\,\frac{5}{2}\,[\,.$

Remarque : La condition b) implique la condition a), donc $S_{\text{b}} \subset S_{\text{a}}\,.$
On aurait pu se passer de la première étape.

2. On donne le trinôme $P(x) = (m-2)\,x^2 - 4mx + 5m - 1\,, \quad m \in \mathbb{R}\,.$

a) Déterminer m pour que la courbe d'équation $y = P(x)$ soit entièrement contenue dans le demi-plan défini par : $y < -6x + 5\,.$

b) Déterminer l'équation de la parabole définie par $y = P(x)$ vérifiant les deux conditions suivantes :

i) la parabole est tangente à la droite d'équation $y = -6x + 5\,,$
ii) $P(x)$ admet un minimum.

Calculer alors la valeur de x pour laquelle $P(x)$ est minimum.

---

a) La courbe d'équation $y = P(x)$ est entièrement contenue dans le demi-plan défini par : $y < -6x + 5$ si et seulement si

$$P(x) < -6x + 5 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Soit $Q(x) = P(x) - (-6x+5) = (m-2)\,x^2 - 2\,(2m-3)\,x + 5m - 6\,.$

$Q(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ si et seulement si le discriminant Δ de $Q(x)$ et le coefficient de x^2 sont tous les deux strictement négatifs.

$$\Delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\,(2m-3)^2 - 4\,(5m-6)\,(m-2) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4\,(m-1)\,(m-3) < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (m-1)\,(m-3) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \,]-\infty\,,\,1\,[\,\cup\,]\,3\,,\,+\infty\,[\,.$$

Et $m - 2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \,]-\infty\,,\,2\,[\,.$

Les deux conditions sont vérifiées si et seulement si $m \in \,]-\infty\,,\,1\,[\,.$

b) La parabole est tangente à la droite d'équation $y = -6x + 5$ si et seulement si l'équation $P(x) = -6x + 5$ admet deux solutions confondues.
Le discriminant Δ de $Q(x) = P(x) - (-6x + 5)$ doit donc être nul.
Et $P(x)$ admet un minimum si et seulement si son coefficient de x^2 est strictement positif.

$$\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 1 \text{ ou } m = 3 \qquad \text{et} \qquad m - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m > 2\,.$$

D'où $m = 3$; et l'équation de la parabole est $y = x^2 - 12x + 14$.

L'abscisse du minimum est $x_{\min} = \dfrac{12}{2} = 6$.

3. On considère l'équation : $x^2 + (m - 2)\,x - (m + 3) = 0$.

Déterminer m pour que la somme des carrés des racines soit égale à 9.

Indication : utiliser les formules de Viète pour exprimer la somme des carrés des racines.

- Existence des racines x_1 et x_2 :

$$\Delta = (m - 2)^2 + 4\,(m + 3) = m^2 + 16\,, \qquad \Delta > 0 \quad \forall\, m \in \mathbb{R}\,.$$

- Expression de $x_1^2 + x_2^2$ à l'aide des formules de Viète :

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2\,x_1\,x_2 = S^2 - 2\,P \quad \text{avec } S = x_1 + x_2 \text{ et } P = x_1\,x_2\,.$$

$$S = -(m - 2) \qquad \text{et} \qquad P = -(m + 3)\,.$$

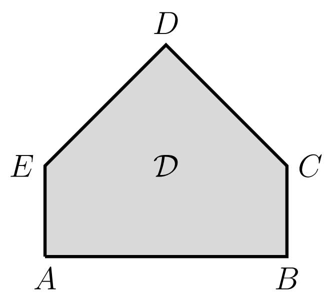
$$x_1^2 + x_2^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad (m - 2)^2 + 2\,(m + 3) = 9 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (m - 1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 1\,.$$

La somme des carrés des racines est égale à 9 si et seulement si $m = 1$.

4. On considère le domaine $\mathcal{D}$ ci-contre.

- On note a la longueur du côté AB.
- On note b la longueur du côté BC.
- $ABCE$ est un rectangle.
- ECD est un triangle isocèle rectangle en D.
- Le périmètre L du domaine $\mathcal{D}$ est fixé et vaut 10.



Le but est de trouver a et b pour que l'aire de $\mathcal{D}$ soit maximale, avec la contrainte que le périmètre est fixé constant à la valeur 10. (NB. On appelle ce genre de problème des problèmes d'optimisation sous contraintes.)

a) Exprimer la longueur b en fonction du périmètre et de a.

b) Déterminer l'ensemble des valeurs admissibles pour a, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs possibles de a pour qu'un tel domaine soit constructible.

Indication : utiliser que $a > 0$, $b > 0$ et l'expression de b trouvée au point précédent.

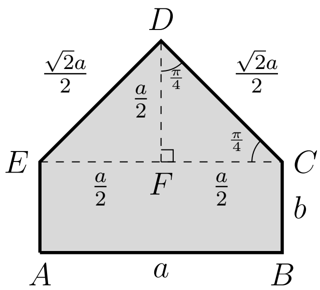
c) Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ en fonction de a.

d) Déterminer la valeur de a pour que l'aire soit maximale.

e) Vérifier que la valeur de a trouvée au point précédent est bien contenue dans l'ensemble des valeurs admissibles.

---

a) On cherche les longueurs des côtés manquants et on exprime le périmètre. Dans la figure ci-contre, la hauteur DF est également la médiatrice du segment EC et la bissectrice de l'angle en D. Par conséquent, puisque l'angle en D est droit, les triangles EFD et FCD sont isocèles et rectangles en F.



On a donc $EF = FC = FD = \frac{a}{2}$ et par le théorème de Pythagore $DC = DE = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.
On a alors

$$L = 10 = a + 2b + \sqrt{2}a \Leftrightarrow b = \frac{10 - (\sqrt{2}+1)a}{2}.$$

b) Pour déterminer les valeurs admissibles pour a, on examine les contraintes géométriques du problème. On doit imposer que $a > 0$ et $b > 0$ (on doit pouvoir construire la base rectangulaire), autrement dit

$$a > 0 \text{ et } \frac{10 - (\sqrt{2}+1)a}{2} > 0 \Leftrightarrow a > 0 \text{ et } a < \frac{10}{1+\sqrt{2}}.$$

L'ensemble des valeurs admissibles est donc l'intervalle $]0, \frac{10}{1+\sqrt{2}}[$.

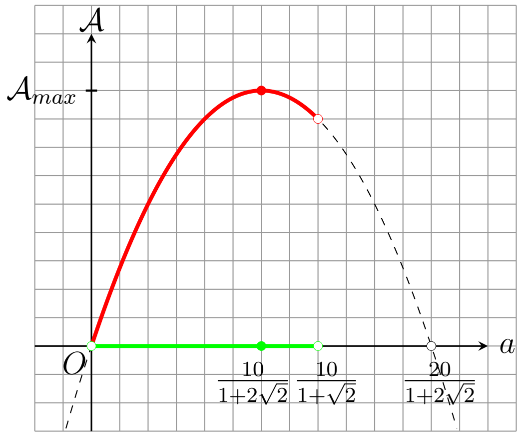
c) L'aire du domaine $\mathcal{D}$ est l'aire du rectangle sommée avec l'aire du triangle :

$$\mathcal{A} = ab + \frac{a^2}{4} = -\frac{1+2\sqrt{2}}{4}a^2 + 5a.$$

d) Au point précédent, on a calculé que

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(a) = -\frac{1+2\sqrt{2}}{4}a^2 + 5a.$$

C'est un trinôme du second degré en a, dont le graphe est une parabole avec les branches orientées vers le bas. Il existe donc un maximum en $a_{max} = \frac{10}{1+2\sqrt{2}}$ (On rappelle que pour un trinôme $P(x) = ax^2+bx+c$, avec $a < 0$, le maximum est atteint en $x = \frac{-b}{2a}$.)



e) Pour vérifier si la valeur trouvée au point précédent est admissible, on compare $\frac{10}{1+2\sqrt{2}}$ avec $\frac{10}{1+\sqrt{2}}$. Comme $1+2\sqrt{2} > 1+\sqrt{2}$, on a $\frac{1}{1+2\sqrt{2}} < \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ et donc

$$\frac{10}{1+2\sqrt{2}} < \frac{10}{1+\sqrt{2}}.$$

La valeur trouvée au point précédent est donc admissible : on peut construire le domaine d'aire maximale sous la contrainte que son périmètre vaut 10.

5. Simplifier les expressions suivantes où p et q sont des nombres réels strictement positifs.

a) $A = [-p\,(-p^{-2})^m]^{-2m} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}\,.$

b) $B = 9\,\sqrt[3]{2\,p^6\,q} + 3\,\sqrt[3]{-16\,p^3\,q} + \sqrt[3]{2\,q}\,.$

---

a)
$$\begin{aligned} A &= [-p\,(-p^{-2})^m]^{-2m}, \qquad m \in \mathbb{Z} \\ &= (-p)^{-2m} \cdot (-p^{-2})^{-2m^2} \\ &= (-1)^{-2m} \cdot p^{-2m} \cdot (-1)^{-2m^2} \cdot (p^{-2})^{-2m^2} \\ &= p^{-2m} \cdot p^{4m^2} \qquad \text{car } -2m \text{ et } -2m^2 \text{ sont des nombres pairs} \\ &= p^{4m^2-2m}. \end{aligned}$$

b) $B = 9\,\sqrt[3]{2\,p^6\,q} + 3\,\sqrt[3]{-16\,p^3\,q} + \sqrt[3]{2\,q}\,.$

Dans les trois termes de B apparaît la quantité $\sqrt[3]{2\,q}$, on la met en évidence.

$$
\begin{aligned}
B &= \sqrt[3]{2\,q}\ \left[9\,\sqrt[3]{p^6} + 3\,\sqrt[3]{-8\,p^3} + 1\right] \\
&= \sqrt[3]{2\,q}\ \left[\,9\,p^2 + 3\,p\,\sqrt[3]{-8} + 1\,\right] \\
&= \sqrt[3]{2\,q}\ \left[\,(3\,p)^2 - 2\,(3\,p) + 1\,\right] \\
&= \sqrt[3]{2\,q}\ \left(\,3p - 1\,\right)^2 .
\end{aligned}
$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Dans les cinq cas suivants, déterminer si les deux expressions données sont égales. Justifier rigoureusement votre réponse.

a) $A(x) = \dfrac{1}{x}\sqrt{x^2+x+1}$ et $a(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$,

b) $B(x) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{x^6+1}$ et $b(x) = x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}$,

c) $C(x) = \sqrt[3]{x^4+x^3}$ et $c(x) = x\,\sqrt[3]{x+1}$,

d) $D(x) = \sqrt{x^6}$ et $d(x) = x^2\,|x|$,

e) $E(x) = \sqrt[4]{x^2}$ et $e(x) = \sqrt{x}$.

On commence par se forger une opinion en comparant, par exemple, les domaines de définition ou l'ensemble des valeurs des deux expressions.

Si les deux expressions semblent être différentes, on cherche un contre-exemple à l'égalité.

Si les deux expressions semblent être égales, on tente une démonstration.

a) Les deux expressions ont même domaine de définition $D_A = D_a = \mathbb{R}^*$, mais elles n'ont pas même ensemble de valeurs : $a(x)$ est toujours strictement positif, $A(x)$ peut être négatif.

Contre-exemple à l'égalité : $x = -1$, $A(-1) = -1$, $a(-1) = +1$.

b) Les deux expressions ont même domaine de définition $D_B = D_b = \mathbb{R}^*$ et même ensemble de valeurs : $V_B = V_b = \,]-\infty\,, -1\,[\,\cup\,]\,1\,, +\infty\,[$.

Montrons que ces deux expressions coïncident sur leur domaine de définition.

$$\operatorname{sgn}(x)\ \sqrt{x^6+1} \ = \ \operatorname{sgn}(x)\ \sqrt{x^6\,(1+\tfrac{1}{x^6})} \ = \ \operatorname{sgn}(x)\ \sqrt{x^6}\ \sqrt{1+\tfrac{1}{x^6}}$$

$$= \ \operatorname{sgn}(x)\ |x^3|\ \sqrt{1+\tfrac{1}{x^6}} \ = \ \operatorname{sgn}(x^3)\ |x^3|\ \sqrt{1+\tfrac{1}{x^6}} \ = \ x^3\ \sqrt{1+\tfrac{1}{x^6}}\ , \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^*.$$

c) Les deux expressions ont même domaine de définition et même ensemble de valeurs.

Montrons que ces deux expressions coïncident sur leur domaine de définition.

$$\sqrt[3]{x^4+x^3} \;=\; \sqrt[3]{x^3\,(x+1)} \;=\; \sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{x+1} \;=\; x\,\sqrt[3]{x+1}\,, \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}^*.$$

d) $\sqrt{x^6} \;=\; x^2\cdot|x|\,, \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^*.$ Démonstration :

$$\sqrt{x^6} \;=\; \sqrt{(x^3)^2} \;=\; |x^3| \;=\; |x^2\cdot x| \;=\; |x^2|\cdot|x| \;=\; x^2\cdot|x|\,.$$

e) Ces deux expressions ne sont pas égales car elles ont des domaines de définition différents.

Contre-exemple à l'égalité : $x=-1\,, \quad E(-1)=1 \quad$ et $\quad -1\notin D_e\,.$

7. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\sqrt{-x^2-x+6}=-(x+1)\,.$

- Domaine de définition.

$$D_{\text{def}}=\left\{x\in\mathbb{R}\;/\;-x^2-x+6\geq 0\right\} \;=\; [-3\,,\,2\,]\,.$$

- Résolution de l'équation sur son domaine de définition.
  - Cette équation n'admet d'éventuelles solutions que si $-(x+1)\geq 0\,.$

    Condition de positivité :

    $$-(x+1)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\leq -1 \quad\Leftrightarrow\quad x\in\;[-3\,,\,-1\,]\,.$$

  - Sous cette condition, les deux membres de l'équation étant positifs, on peut les élever au carré.

    $$\sqrt{-x^2-x+6}=-(x+1) \quad\Leftrightarrow\quad -x^2-x+6=[-(x+1)\,]^2$$

    $$\Leftrightarrow\quad 2x^2+3x-5=0 \quad\Leftrightarrow\quad (2x+5)\,(x-1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{ll} x=-\frac{5}{2} & \text{convient}\\ \text{ou} & \\ x=1 & \text{à exclure}\end{array}\right.$$

    En conclusion : $\quad S=\{-\frac{5}{2}\}\,.$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\dfrac{x-2\,(1+\sqrt{x-1}\,)}{2x-\sqrt{x-1}-5}=1\,.$

- Domaine de définition.

$$D_{\text{def}} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;/\; x-1 \geq 0 \quad \text{et} \quad 2x - \sqrt{x-1} - 5 \neq 0 \right\} .$$

i) $x - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [\,1\,;\,+\infty[\,.$

ii) Résolvons l'équation : $\sqrt{x-1} = 2x - 5\,.$

- Condition de positivité : $2x - 5 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[\,\frac{5}{2}\,;\,+\infty\,\right[.$
- Sur cet intervalle, les deux membres de l'équation sont positifs ou nuls, on peut les élever au carré :

$$x - 1 = (2x-5)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 21x + 26 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \ : \ \text{à exclure} \\ \text{ou} \\ x = \frac{13}{4} \end{cases}$$

L'unique solution de l'équation $\sqrt{x-1} = 2x - 5$ est $x = \frac{13}{4}\,.$

En conclusion : $D_{\text{def}} = \left[\,1\,;\,\frac{13}{4}\,\right[\,\cup\, \left]\,\frac{13}{4}\,;\,+\infty\,\right[\,.$

- Résolution de l'équation sur son domaine de définition.

$$\frac{x - 2\,(1 + \sqrt{x-1})}{2x - \sqrt{x-1} - 5} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2\,(1 + \sqrt{x-1}) = 2x - \sqrt{x-1} - 5$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x-1} = 3 - x\,.$$

Condition de positivité : $3 - x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \ [\,1\,;\,3\,]\,.$

Sur ce domaine restreint, l'équation devient équivalente à :

$$x - 1 = (3-x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 7x + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = 5 \ : \ \text{à exclure} \end{cases}$$

En conclusion : $S = \{2\}\,.$

8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $x - 3 \ > \ \sqrt{x^2 + 3x}\,,$ b) $\sqrt{\dfrac{x^2\,(2x-5)}{2\,(x+1)}} \ \geq \ 2 - x\,.$

---

a) • Domaine de définition.

$$D_{\text{def}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x \geq 0\} =]-\infty\,,\,-3] \cup [\,0\,,+\infty\,[\,.$$

• Premier cas

$x - 3 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in\,]-\infty\,,\,-3] \cup [\,0\,,\,3\,[\,.$ Dans ce cas, on a

$$\underbrace{\sqrt{x^2+3x}}_{\geq 0} \;<\; \underbrace{x-3}_{<0}\,.$$

Sur ce référentiel restreint, l'inéquation n'est pas vérifiée, l'ensemble solution est vide : $S_1 = \emptyset$.

• Deuxième cas

$x - 3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [\,3\,,\,+\infty\,[\,.$ Dans ce cas, les deux membres de l'inéquation sont positifs, on peut les élever au carré :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+3x} < x-3 \;&\Leftrightarrow\; x^2+3x < (x-3)^2 \\ &\Leftrightarrow\; x^2+3x < x^2-6x+9 \\ &\Leftrightarrow\; 9x < 9 \\ &\Leftrightarrow\; x < 1\,. \end{aligned}$$

Sur ce référentiel restreint, l'ensemble solution est aussi vide : $S_2 = \emptyset$.

• Conclusion

L'ensemble solution est la réunion des ensembles solutions partiels :

$$S = S_1 \cup S_2 = \emptyset\,.$$

b) • Domaine de définition.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\text{def}} &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x+1 \neq 0 \;\text{ et }\; \tfrac{x^2\,(2x-5)}{2\,(x+1)} \geq 0 \right\} \\ &= \;]-\infty\,,\,-1\,[\; \cup\; \{0\} \;\cup\; [\,\tfrac{5}{2}\,,\,+\infty\,[\,. \end{aligned}$$

• La résolution de cette inéquation irrationnelle dépend du signe de $2 - x$.

∘ $2 - x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [\,\frac{5}{2}\,,\,+\infty\,[\,.$

Sur ce référentiel, l'inéquation est toujours vérifiée, $S_1 = [\,\frac{5}{2}\,,\,+\infty\,[.$

∘ $2 - x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in\,]-\infty\,,\,-1\,[\, \cup \{\,0\,\}\,.$

Sur ce référentiel, les deux membres de l'inéquation sont positifs ou nuls, on peut les élever au carré.

$$\frac{x^2\,(2x-5)}{2\,(x+1)} \;\geq\; (2-x)^2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2\,(2x-5)}{2\,(x+1)} \;-\; (2-x)^2 \;\geq\; 0$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{x^2\,(2x-5)-2\,(2-x)^2\,(x+1)}{2\,(x+1)} \;\geq\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2-8}{x+1} \;\geq\; 0$$

On étudie le signe de cette fraction rationnelle Q à l'aide d'un tableau de signe :

x		$-2\sqrt{2}$		-1		$2\sqrt{2}$	
x^2-8	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
Q	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

$Q \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \in [-2\sqrt{2}\,,\,-1\,[\,\cup\,[\,2\sqrt{2}\,,\,+\infty\,[\,; \qquad S_2 \;=\; [-2\sqrt{2}\,,\,-1\,[\,.$

- En conclusion :

$$S \;=\; S_1 \,\cup\, S_2 \;=\; [-2\sqrt{2}\,,\,-1\,[\;\cup\;[\,\tfrac{5}{2}\,,\,+\infty\,[\;.$$