Corrigé 3

1. On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{1}{2}\,x - 2$ et $g(x) = -3\,x - \frac{11}{2}$.

a) Dans un repère orthonormé (unité = 2 carrés), représenter le graphe de f et de g, puis en déduire celui de $|f|$.

Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $|f(x)| = g(x)$.

b) Interpréter graphiquement, sur l'exemple ci-dessus, l'équivalence suivante

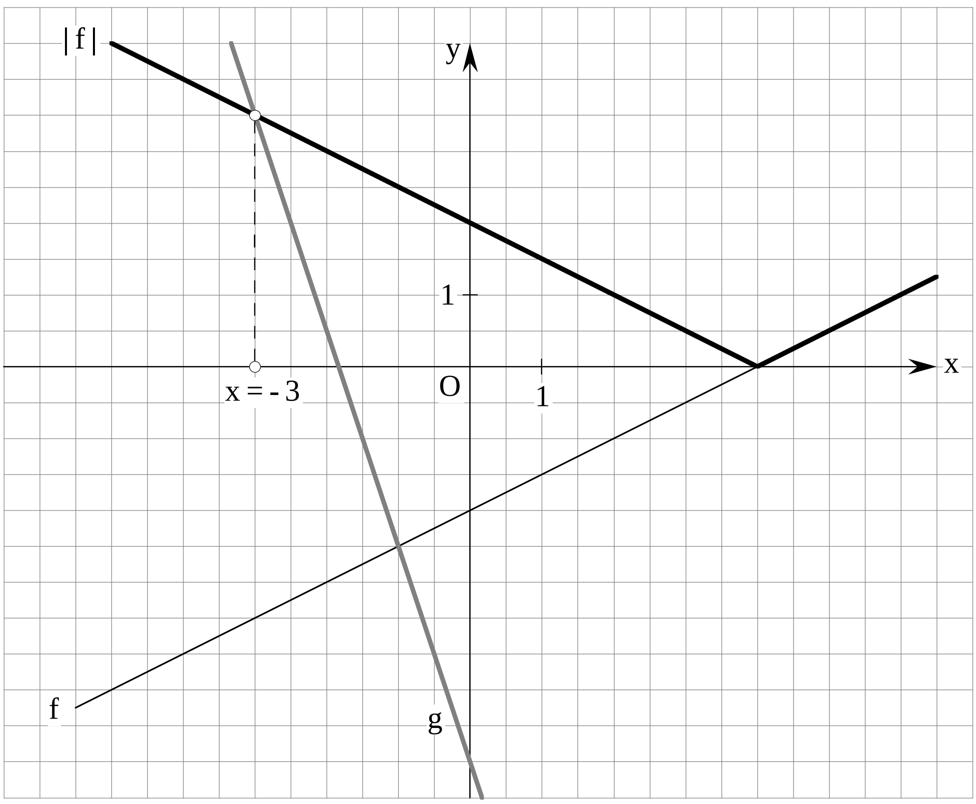
$$|\,f(x)\,| = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad g(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$$

Pour cela, résoudre graphiquement les deux équations $f(x) = g(x)$ et $f(x) = -g(x)$ sur le domaine $g(x) \geq 0$ et observer que la solution est la même qu'au point a).

---

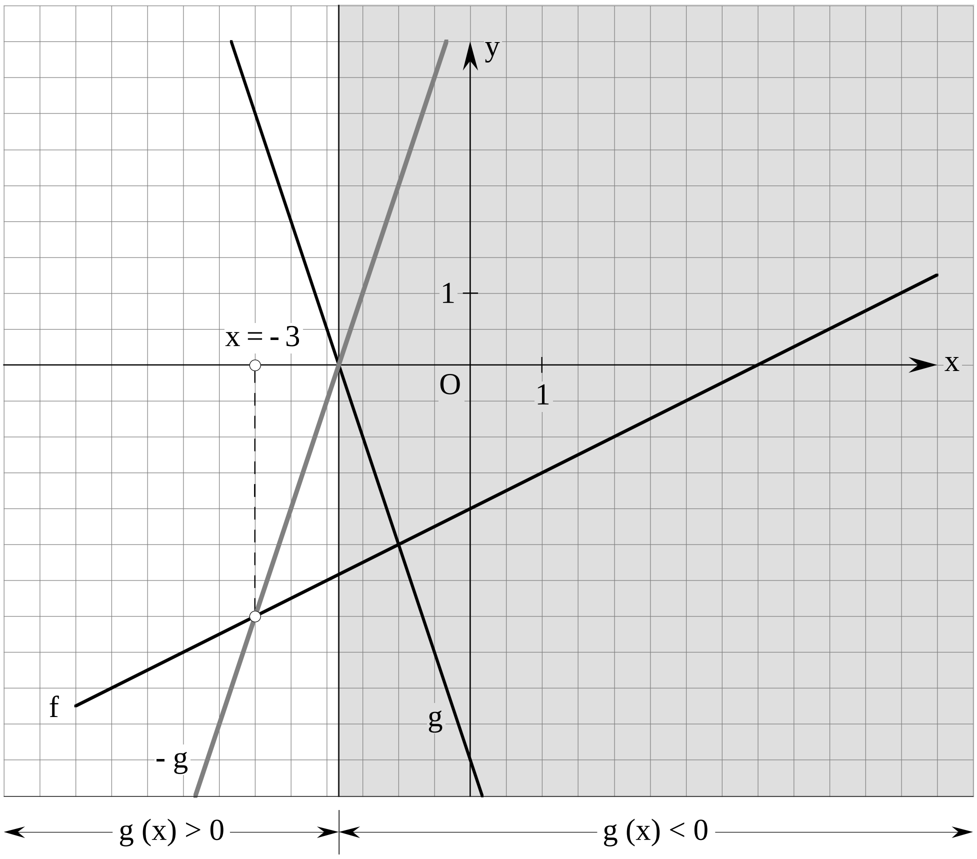
a) Les graphes de f et g sont des droites. Le graphe de $|f|$ se déduit de celui de f en symétrisant par rapport à l'axe Ox tous les points d'ordonnée négative.

On en déduit graphiquement que l'unique solution de $|\,f(x)\,| = g(x)$ est $x = -3$.



b) On représente le graphe de $-g$ en symétrisant par rapport à l'axe Ox tous les points du graphe de g.

Sur le domaine $D_{\text{pos}} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq 0 \,\}$ (domaine blanc sur la figure ci-dessous), l'équation $f(x) = g(x)$ n'admet pas de solution et l'équation $f(x) = -g(x)$ admet une unique solution $x = -3$.



2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes :

a) $|-x+4| = -\dfrac{3}{x}$,

b) $\left|x^3 - 2x^2 - 4x + 3\right| = (x^2+1)\,(x-3)$.

---

a) Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R}^*$.

Condition de positivité : cette équation admet d'éventuelles solutions seulement si $-\frac{3}{x} \geq 0$. Or

$$-\frac{3}{x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0\,.$$

On a donc $D_{\text{pos}} = \mathbb{R}_-$.

Pour $x \in D_{\text{déf}} \cap D_{\text{pos}} = \mathbb{R}_-^*$, l'équation devient :

$$-x+4=\pm\frac{3}{x} \quad\Leftrightarrow\quad x\,(-x+4)=\pm 3 \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{ll} x^2-4x+3=0 & (1)\\ \text{ou} & \\ x^2-4x-3=0 & (2)\,. \end{array}\right.$$

- Résolution de l'équation (1)

  $x^2-4x+3=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-1)\,(x-3)=0\,.$ Sur $\mathbb{R}_-^*$,on a $S_1=\emptyset\,.$

- Résolution de l'équation (2)

  $x^2-4x-3=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=2\pm\sqrt{7}\,.$ Sur $\mathbb{R}_-^*$, $S_2=\left\{2-\sqrt{7}\right\}\,.$

$$S=S_1\cup S_2=\left\{2-\sqrt{7}\right\}\,.$$

b) Domaine de définition : $D_{\text{def}}=\mathbb{R}\,.$

Condition de positivité : cette équation n'admet d'éventuelles solutions que si $(x^2+1)\,(x-3)\geq 0\,.$

$$(x^2+1)\,(x-3)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x-3\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\in\ [\,3\,,\ +\infty\,[\,.$$

On a donc $D_{\text{pos}}=[\,3\,,\ +\infty\,[$.

Pour $x\in D_{\text{déf}}\cap D_{\text{pos}}=[\,3\,,\ +\infty\,[$, l'équation devient :

$$\begin{aligned} & x^3-2x^2-4x+3=\pm(x^2+1)\,(x-3)\\ \Leftrightarrow\ & x^3-2x^2-4x+3=\pm(x^3-3x^2+x-3)\\ \Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{ll} x^2-5x+6=0 & (1)\\ \text{ou} & \\ 2x^3-5x^2-3x=0 & (2)\,. \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Résolution de l'équation (1)

  $x^2-5x+6=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-3)\,(x-2)=0\,.$

  Sur $[\,3\,,\ +\infty\,[$, $S_1=\{3\}\,.$

- Résolution de l'équation (2)

  $2x^3-5x^2-3x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x\,(2x^2-5x-3)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x\,(2x+1)\,(x-3)=0\,.$

  Sur $[\,3\,,\ +\infty\,[$, $S_2=\{3\}\,.$

$$S=S_1\cup S_2=\{3\}\,.$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante par rapport à la variable x en fonction du paramètre m :

$$\left| m\,x + m + 2 \right| \;=\; x + 3\,.$$

Expliciter l'ensemble solution pour chaque valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R}$.

Cette équation n'admet d'éventuelles solutions que si $x + 3 \geq 0$.
Condition de positivité : $x + 3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-3\,,\, +\infty\,[$.

Sur le domaine restreint $D_{\text{def}} \cap D_{\text{pos}} = D_{\text{pos}} = [-3\,,\, +\infty\,[$, l'équation est équivalente au système suivant :

$$\left| m\,x + m + 2 \right| \;=\; x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m\,x + m + 2 \;=\; x + 3 & (a) \\ \text{ou} & \\ m\,x + m + 2 \;=\; -(x + 3) & (b) \end{cases}$$

Résolution de l'équation (a) :

$$m\,x + m + 2 \;=\; x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad (m - 1)\,x \;=\; -m + 1\,,$$

- si $m = 1$, l'équation devient $0\,x = 0$, elle est vérifiée pour tout $x \in D_{\text{pos}}$,
  $S_a = D_{\text{pos}} = [-3\,,\, +\infty\,[$,
- si $m \neq 1$, l'équation devient $x = \dfrac{-m + 1}{m - 1} \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$,
  or $-1 \in D_{\text{pos}}$ donc $S_a = \{-1\}$.

Résolution de l'équation (b) :

$$m\,x + m + 2 \;=\; -(x + 3) \quad \Leftrightarrow \quad (m + 1)\,x \;=\; -m - 5\,,$$

- si $m = -1$, l'équation devient $0\,x = -4$, elle n'est jamais vérifiée,
  $S_b = \emptyset$,
- si $m \neq -1$, l'équation devient $x = \dfrac{-m - 5}{m + 1}$.
  Mais $x = -\frac{m+5}{m+1}$ n'est solution que s'il appartient à D_{pos} :
  $$\frac{-m - 5}{m + 1} \geq -3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\,(m - 1)}{m + 1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \,]-\infty\,,\, -1\,[\, \cup\, [\,1\,,\, +\infty\,[\,,$$
  donc si $m \in \,]-\infty\,,\, -1\,[\, \cup\, [\,1\,,\, +\infty\,[$ alors $S_b = \{-\frac{m+5}{m+1}\}$.

Détermination de l'ensemble solution S de l'équation initiale en fonction de $m \in \mathbb{R}$:

$$S = S_a \cup S_b\,.$$

- ∘ si $m \in \,]-\infty\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[$ alors $S = \{-1\,,\,-\frac{m+5}{m+1}\,\}$,
- ∘ si $m \in \,[-1\,,\,1\,[$ alors $S = \{-1\,\}$,
- ∘ si $m = 1$ alors $S = [-3\,,\,+\infty\,[$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| < x-1$,

b) $\left|\dfrac{5x^2-9x-8}{x-1}\right| > 8-x$,

c) $\Big|\,2\,(x+3) - |x-1|\,\Big| \leq |x-1|$,

d) $|x^2+3x-1| \geq x^2+x+1$,

e) $\dfrac{1-x}{2+x} \leq 1 - \left|1+\dfrac{2}{3x-4}\right|$.

---

a) Résolution de l'inéquation $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| < x-1$.

- Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- On utilise l'équivalence suivante :

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < x-1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1} < x-1 & (1) \\ \text{et} & \\ \dfrac{x-1}{x+1} > -(x-1) & (2) \end{cases}$$

- Résolution de l'inéquation (1) :

$$\frac{x-1}{x+1} < x-1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x+1} - (x-1) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x+1} - \frac{(x-1)\,(x+1)}{x+1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)\,[1-(x+1)]}{x+1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{x\,(x-1)}{x+1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x\,(x-1)}{x+1} > 0\,.$$

Etude du signe de la fraction rationnelle $Q_1(x) = \dfrac{x\,(x-1)}{x+1}$:

x		-1		0		1	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$Q_1(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$

$$Q_1(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \,]-1\,,\,0\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[\,, \qquad S_1 = \,]-1\,,\,0\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[\,.$$

- Résolution de l'inéquation (2) :

$$\frac{x-1}{x+1} > -(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x+1}+(x-1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x+1}+\frac{(x-1)\,(x+1)}{x+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)\,\left[1+(x+1)\right]}{x+1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+2)\,(x-1)}{x+1} > 0\,.$$

Etude du signe de la fraction rationnelle $Q_2(x) = \dfrac{(x+2)\,(x-1)}{x+1}$:

x		-2		-1		1	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$Q_2(x)$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

$$Q_2(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \,]-2\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[\,, \qquad S_2 = \,]-2\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[\,.$$

- Conclusion : $\quad S = S_1 \cap S_2\,,$

avec $\quad S_1 = \,]-1\,,\,0\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[\quad$ et $\quad S_2 = \,]-2\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[\,.$

$$S = \,]\,1\,,\,+\infty\,[\,.$$

b) Résolution de l'inéquation $\left|\dfrac{5x^2-9x-8}{x-1}\right| > 8-x\,.$

- Domaine de définition : $D_{\text{déf}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}\,.$
- Equivalence :

$$\left|\frac{5x^2-9x-8}{x-1}\right| > 8-x \iff \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{5x^2-9x-8}{x-1} & > \; 8-x & (1) \\ \text{ou} & & \\ \dfrac{5x^2-9x-8}{x-1} & < \; -(8-x) & (2)\,. \end{array}\right.$$

- Résolution de (1):

$$\begin{aligned}
\frac{5x^2-9x-8}{x-1}-(8-x) &> 0\\
\frac{5x^2-9x-8-(8-x)(x-1)}{x-1} &> 0\\
\frac{5x^2-9x-8-(-x^2+9x-8)}{x-1} &> 0\\
\frac{6x^2-18x}{x-1} &> 0\\
\frac{6x(x-3)}{x-1} &> 0\,.
\end{aligned}$$

  Par un tableau des signes, l'expression changeant de signe en $x=0$, $x=1$ et $x=3$, on a

$$S_1 =]\,0,1\,[\cup]\,3,+\infty\,[\,.$$

- Résolution de (2):

$$\begin{aligned}
\frac{5x^2-9x-8}{x-1}+(8-x) &< 0\\
\frac{5x^2-9x-8+(8-x)(x-1)}{x-1} &< 0\\
\frac{5x^2-9x-8+(-x^2+9x-8)}{x-1} &< 0\\
\frac{4x^2-16}{x-1} &< 0\\
\frac{4(x+2)(x-2)}{x-1} &< 0\,.
\end{aligned}$$

  Par un tableau des signes, l'expression changeant de signe en $x=-2$, $x=1$ et $x=2$, on a

$$S_2 =]-\infty,-2\,[\cup]\,1,2\,[\,.$$

- Conclusion

$$S = S_1\cup S_2 =]-\infty,-2\,[\cup]\,0,1\,[\cup]\,1,2\,[\cup]\,3,+\infty\,[\,.$$

c) Résolution de l'inéquation $\Big|2\,(x+3)-|x-1|\Big| \leq |x-1|\,.$

Domaine de définition : $D_{\text{def}}=\mathbb{R}\,.$

Cette inéquation est équivalente au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\,(x+3)-|x-1| \;\leq\; |x-1| \\ \text{et} \\ 2\,(x+3)-|x-1| \;\geq\; -|x-1| \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{ll} |x-1| \;\geq\; x+3 & (1) \\ \text{et} & \\ x+3 \;\geq\; 0 & (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-1 \ \geq \ x+3 \\ \text{ou} \\ x-1 \ \leq \ -(x+3) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0\,x \ \geq \ 4 \\ \text{ou} \\ x \ \leq \ -1 \end{cases}, \qquad S_1 =]-\infty\,,\,-1\,]\,.$$

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -3\,, \qquad S_2 = [-3\,,\,+\infty\,[\,.$$

En conclusion : $\qquad S = S_1 \cap S_2 = [-3\,,\,-1\,]\,.$

d) Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R}\,.$

On utilise l'équivalence suivante :

$$|x^2+3x-1| \geq x^2+x+1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+3x-1 \geq x^2+x+1 \\ \text{ou} \\ x^2+3x-1 \leq -(x^2+x+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x-2 \geq 0 & (1) \\ \text{ou} \\ 2x^2+4x \leq 0 & (2) \end{cases}$$

- Résolution de l'inéquation (1) :

  $2x-2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1\,, \qquad \mathcal{S}_1 = [\,1\,,\,+\infty\,[\,.$

- Résolution de l'inéquation (2) :

  $2x^2+4x \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x\,(x+2) \leq 0\,, \qquad \mathcal{S}_2 = [-2\,,\,0\,]\,.$

- Conclusion :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = [-2\,,\,0\,] \cup [\,1\,,\,+\infty\,[\,.$$

e) Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{-2\,,\,\frac{4}{3}\}\,.$

$$\frac{1-x}{2+x} \leq 1 - \left|1+\frac{2}{3x-4}\right| \quad \Leftrightarrow \quad \left|1+\frac{2}{3x-4}\right| \leq 1 - \frac{1-x}{2+x}\,.$$

On utilise l'équivalence suivante :

$$\left|1+\frac{2}{3x-4}\right| \leq 1-\frac{1-x}{2+x} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1+\frac{2}{3x-4} \leq 1-\frac{1-x}{2+x} & (1) \\ \text{et} \\ 1+\frac{2}{3x-4} \geq -1+\frac{1-x}{2+x} & (2) \end{cases}$$

Résolution de l'inéquation (1) :

$$1+\frac{2}{3x-4} \leq 1-\frac{1-x}{2+x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-x}{2+x}+\frac{2}{3x-4} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(1-x)(3x-4)+2(2+x)}{(2+x)(3x-4)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-3x^2+9x}{(2+x)(3x-4)} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x(3-x)}{(2+x)(3x-4)} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x(x-3)}{(2+x)(3x-4)} \geq 0.$$

Signe de la fraction rationnelle $Q_1(x) = \frac{x(x-3)}{(2+x)(3x-4)}$.

x	$-\infty$		-2		0		$\frac{4}{3}$		3		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$Q_1(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On en déduit l'ensemble solution :

$$Q_1(x) \geq 0 \iff x \in]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\,\left[0\,,\,\frac{4}{3}\right[\,\cup\,[\,3\,,+\infty\,[.$$

$S_1 =]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\,[\,0\,,\,\frac{4}{3}\,[\,\cup\,[\,3\,,\,+\infty\,[\,.$

Résolution de l'inéquation (2) :

$$1+\frac{2}{3x-4} \geq -1+\frac{1-x}{2+x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3x-4}+\frac{x-1}{2+x}+2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\,(2+x)+(x-1)\,(3x-4)+2\,(3x-4)\,(2+x)}{(3x-4)\,(2+x)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9x^2-x-8}{(3x-4)\,(2+x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(9x+8)\,(x-1)}{(3x-4)\,(2+x)} \geq 0$$

Signe de la fraction rationnelle $Q_2(x) = \dfrac{(9x+8)\,(x-1)}{(3x-4)\,(2+x)}$.

x		-2		$-\frac{8}{9}$		1		$\frac{4}{3}$	
$9x+8$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$3x-4$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$Q_2(x)$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

$$Q_2(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in\,]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\,[-\tfrac{8}{9}\,,\,1\,]\,\cup\,]\,\tfrac{4}{3}\,,\,+\infty\,[\,.$$

$$S_2 = \,]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\,[-\tfrac{8}{9}\,,\,1\,]\,\cup\,]\,\tfrac{4}{3}\,,\,+\infty\,[\,.$$

Conclusion :

$$S = S_1 \cap S_2 = \left] -\infty\,,\, -2\right[\cup \left[0\,,\,1\right] \cup \left[3\,,\,+\infty\right[.$$

5. Exercice facultatif

Résoudre l'inéquation suivante par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}$ et en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$|2x-1| < m.$$

Domaine de définition : $D_{\text{déf}} = \mathbb{R}$.

Pour $x \in D_{\text{déf}}$, on a l'équivalence

$$|2x-1| < m \iff \begin{cases} 2x-1 < m & (1) \\ \text{et} & \\ 2x-1 > -m & (2) \end{cases}$$

Résolution de l'inéquation (1) :

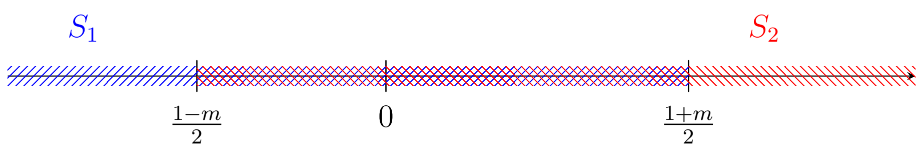
$$2x-1 < m \iff x < \frac{m+1}{2}, \quad S_1 = \left]-\infty, \frac{1+m}{2}\right[.$$

Résolution de l'inéquation (2) :

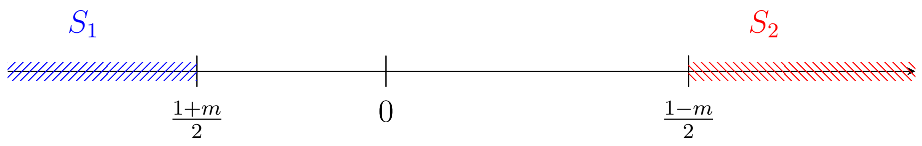
$$2x-1 > -m \iff x > \frac{1-m}{2}, \quad S_2 = \left]\frac{1-m}{2}, +\infty\right[.$$

L'expression de l'ensemble solution $S = S_1 \cap S_2$ dépend de m :

- Si $m = 0$, alors $S = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cap \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[= \emptyset$.
- Si $m > 0$, alors $\frac{1-m}{2} < \frac{1+m}{2}$ et $S = \left]-\infty, \frac{1+m}{2}\right[\cap \left]\frac{1-m}{2}, +\infty\right[= \left]\frac{1-m}{2}, \frac{1+m}{2}\right[$.



- Si $m < 0$, alors $\frac{1-m}{2} > \frac{1+m}{2}$ et $S = \left]-\infty, \frac{1+m}{2}\right[\cap \left]\frac{1-m}{2}, +\infty\right[= \emptyset$.



Résumé :

- si $m \leq 0$, $S = \emptyset$,
- si $m > 0$, $S = \left]\frac{1-m}{2}, \frac{1+m}{2}\right[$.
