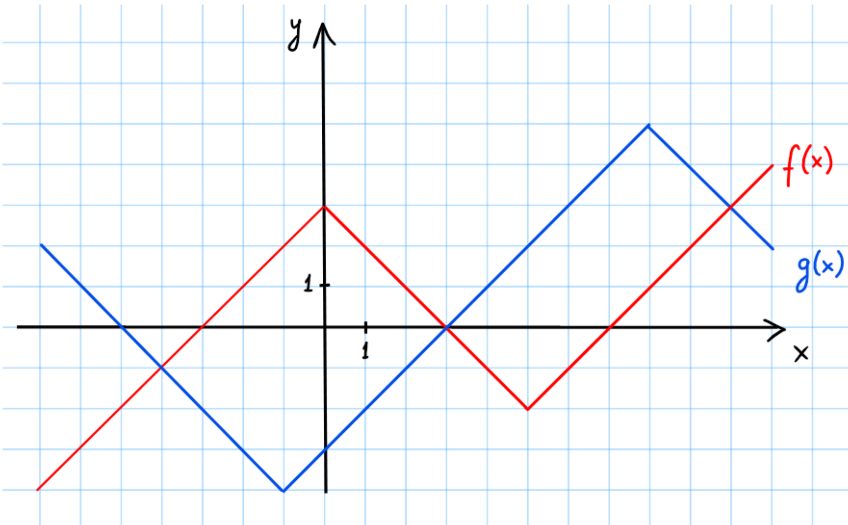
Corrigé 2

1. Soient $f, g : [-7, 11] \to \mathbb{R}$ deux fonctions données par leurs graphes ci-dessous.



Donner les tableaux de signes des fonctions $f(x)$, $g(x)$ et $f(x) - g(x)$.

---

x		-3		3		7	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

x		-5		3	
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Pour trouver le signe de $f(x) - g(x)$, on utilise l'équivalence

$$f(x) - g(x) > 0 \iff f(x) > g(x).$$

Ainsi, on a

x		-4		3		10	
$f(x) - g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les trois inéquations suivantes :

a) $\frac{11}{4}\,x + \frac{1}{5}\,(2 - 3x) \leq \frac{1}{3}\,(7x - 1)\,,$

b) $\dfrac{x+2}{2x-4} \leq \dfrac{5-2x}{x-2} + 3\,,$

c) $\dfrac{1-x}{2+x} \leq -\dfrac{2}{3x-4}\,.$

---

a) L'inéquation $\frac{11}{4}\,x + \frac{1}{5}\,(2-3x) \leq \frac{1}{3}\,(7x-1)$ est définie sur tout $\mathbb{R}$.

On cherche à se ramener à une inéquation de la forme $a\,x \leq b$:

$$\begin{aligned}
\frac{11}{4}\,x + \frac{1}{5}\,(2-3x) \leq \frac{1}{3}\,(7x-1) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{11}{4}\,x + \frac{2}{5} - \frac{3}{5}\,x \leq \frac{7}{3}\,x - \frac{1}{3} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{11}{4}\,x - \frac{3}{5}\,x - \frac{7}{3}\,x \leq -\frac{1}{3} - \frac{2}{5} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{11}{4} - \frac{3}{5} - \frac{7}{3}\right)\,x \leq -\frac{1}{3} - \frac{2}{5} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{11\cdot 5\cdot 3 - 3\cdot 4\cdot 3 - 7\cdot 4\cdot 5}{4\cdot 5\cdot 3}\right)\,x \leq \frac{-5-2\cdot 3}{3\cdot 5} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{165-36-140}{60}\,x \leq -\frac{11}{15} \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{11}{60}\,x \leq -\frac{11}{15} \\
&\Leftrightarrow \quad x \geq \left(-\frac{11}{15}\right)\cdot\left(-\frac{60}{11}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad x \geq 4\,.
\end{aligned}$$

Soit S l'ensemble solution, $S = [\,4\,,\,+\infty\,[\,.$

b) Définition du référentiel : $D_{\text{def}} = \mathbb{R}\setminus\{2\}\,.$

Résoudre une inéquation rationnelle revient à étudier le signe d'une fraction rationnelle. On se ramène donc à une comparaison à 0 :

$$\frac{x+2}{2x-4} \;-\; \frac{5-2x}{x-2} \;-\; 3 \;\leq\; 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x+2 \;-\; 2\,(5-2x) \;-\; 3\,(2x-4)}{2x-4} \;\leq\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x+4}{2x-4} \;\leq\; 0\,.$$

On étudie le signe de cette fraction rationnelle Q à l'aide d'un tableau de signe :

x		2		4	
$-x+4$	$+$		$+$	0	$-$
$2x-4$	$-$	0	$+$		$+$
Q	$-$	‖	$+$	0	$-$

$Q \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in\,]-\infty\,;\,2\,[\,\cup\,[\,4\,;\,+\infty\,[\,; \qquad S = \,]-\infty\,;\,2\,[\,\cup\,[\,4\,;\,+\infty\,[\,.$

c) • Domaine de définition

$$D_{\text{déf}} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 2+x \neq 0 \quad \text{et} \quad 3x-4 \neq 0 \,\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\,,\, \tfrac{4}{3}\,\}\,.$$

• Comparaison à 0

$$\frac{1-x}{2+x} \leq -\frac{2}{3x-4} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1-x}{2+x} + \frac{2}{3x-4} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{(1-x)(3x-4)+2(2+x)}{(2+x)(3x-4)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{-3x^2+9x}{(2+x)(3x-4)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{(-3x)(x-3)}{(2+x)(3x-4)} \leq 0\,.$$

• Etude de signe

x		-2		0		$4/3$		3	
$-3x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$
$x-3$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$2+x$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$3x-4$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
Q	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$

$$Q \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in\,]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\, [\,0\,,\,\tfrac{4}{3}\,[\,\cup\, [\,3\,,\,+\infty\,[\,.$$

$$S = \,]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\, [\,0\,,\,\tfrac{4}{3}\,[\,\cup\, [\,3\,,\,+\infty\,[\,.$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $(x+2)^2 > 4\,,$ b) $(x+3)^3 < 8\,.$

---

a) On se sert des identités remarquables pour factoriser cette différence de deux carrés :

$$(x+2)^2 > 4 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)^2 - 2^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\,(x+2)-2\,]\,[\,(x+2)+2\,] > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x\,(x+4) > 0\,, \qquad S = \,]-\infty\,,\,-4\,[\,\cup\,]\,0\,,\,+\infty\,[\,.$$

b) De même, on se sert des identités remarquables pour factoriser cette différence de deux cubes :

$$(x+3)^3 < 8 \quad \Leftrightarrow \quad (x+3)^3 - 2^3 < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \big[\,(x+3) - 2\,\big]\,\big[\,(x+3)^2 + 2\,(x+3) + 4\,\big] < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x{+}1)\,\big[\,(x+3)^2 + 2\,(x+3) + 1 + 3\,\big] < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x{+}1)\,\big[\,(x+4)^2 + 3\,\big] < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 1 < 0\,, \qquad S = \,]-\infty\,,\,-1\,[\,.$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivantes par rapport à la variable x en fonction du paramètre réel m.

a) $mx - 4 \;=\; 2\,(x-m)\,,$ b) $\dfrac{2}{m-1}\,x \;\leq\; x - \dfrac{1}{m-1}\,, \quad m \neq 1\,.$

---

a) Cette équation est définie pour tout x dans $\mathbb{R}$.

On se ramène à une équation du premier degré en x du type $a\,x \;=\; b\,.$

$$mx - 4 \;=\; 2\,(x-m) \quad \Leftrightarrow \quad (m-2)\,x = 4 - 2m\,.$$

La résolution de cette équation dépend du coefficient $m-2\,.$

- Si $m - 2 \neq 0\,,$ l'équation devient

  $(m-2)\,x = 4 - 2m \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{4-2m}{m-2} \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{-2\,(m-2)}{m-2} \;\Leftrightarrow\; x = -2\,.$

  $S = \{-2\}\,.$

- Si $m - 2 = 0\,,$ l'équation devient : $0\,x = 0\,.$

  L'équation est alors toujours vérifiée : $S = \mathbb{R}\,.$

En résumé :

- Si $m \neq 2\,,$ alors $S = \{-2\}\,.$
- Si $m = 2\,,$ alors $S = \mathbb{R}\,.$

b) Définition du référentiel : $D_{\text{def}} = \mathbb{R}\,.$

Il s'agit d'une inéquation du premier degré en x du type $a\,x \;\leq\; b\,.$

$$\left(\frac{2}{m-1} - 1\right) x \;\leq\; -\frac{1}{m-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3-m}{m-1}\,x \;\leq\; -\frac{1}{m-1}\,.$$

La résolution de cette inéquation dépend du signe du coefficient $\dfrac{3-m}{m-1}\,.$

- $\dfrac{3-m}{m-1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \,]-\infty\,,\ 1\,[\, \cup \,]\,3\,,\ +\infty\,[\,.$

  L'inéquation devient : $x \geq -\dfrac{1}{m-1} \cdot \dfrac{m-1}{3-m} \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \dfrac{1}{m-3}\,.$

  $S = \left[\, \frac{1}{m-3}\,,\ +\infty \,\right[\,.$

- $\dfrac{3-m}{m-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 3\,.$

  L'inéquation devient : $0\,x \leq -\dfrac{1}{2}\,; \qquad S = \emptyset\,.$

- $\dfrac{3-m}{m-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \,]\,1\,,\ 3\,[\,.$

  L'inéquation devient : $x \leq -\dfrac{1}{m-1} \cdot \dfrac{m-1}{3-m} \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \dfrac{1}{m-3}\,.$

  $S = \left]-\infty\,,\ \frac{1}{m-3}\right]\,.$

En résumé :

- Si $m \in \,]-\infty\,,\ 1\,[\, \cup \,]\,3\,,\ +\infty\,[\,,$ alors $S = [\,\frac{1}{m-3}\,,\ +\infty\,[\,.$
- Si $m \in \,]\,1\,,\ 3\,[\,,$ alors $S = \,]-\infty\,,\ \frac{1}{m-3}\,]\,.$
- Si $m = 3\,,$ alors $S = \emptyset\,.$

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes par rapport à la variable x en fonction du paramètre réel m.

a) $\dfrac{m}{x+m} \leq 1\,,$ b) $\dfrac{x^2-m^2}{x+2m} > 0\,.$

---

a) $\dfrac{m}{x+m} \leq 1\,, \quad D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}\,.$

On résout cette inéquation rationnelle en se ramenant à une comparaison à 0 :

$$\frac{m}{x+m} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m}{x+m} - 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x}{x+m} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{x+m} \geq 0\,.$$

Le signe de cette fraction rationnelle s'étudie à l'aide d'un tableau de signe. Il faut cependant ordonner les deux valeurs 0 et $-m$ qui annulent respectivement le numérateur et le dénominateur. On aura alors 3 cas :

- Si $m < 0$ alors $0 < -m$ et le tableau de signe nous donne

		0		$-m$	
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+m$	$-$	$-$	$+$	$\|\|$	$+$
$\frac{x}{x+m}$	$-$	0	$-$	$\|\|$	$+$

- Si $m = 0$, l'inéquation devient $\frac{x}{x} \geq 0 \iff 1 \geq 0$ et $x \neq 0$.
- Si $m > 0$, alors $-m < 0$ et le tableau de signe nous donne

		$-m$		0	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+m$	$-$	$\|\|$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x}{x+m}$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

On en déduit l'ensemble S en fonction de m :

- si $m < 0$, alors $S = \,]-\infty\,,\,0] \cup]-m\,,\,+\infty[$,
- si $m = 0$, alors $S = \mathbb{R}^*$,
- si $m > 0$, alors $S = \,]-\infty\,,\,-m[\cup [0\,,\,+\infty[$.

b) $\dfrac{x^2 - m^2}{x + 2m} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{(x+m)\,(x-m)}{x+2m} > 0\,, \quad D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{-2m\}\,.$

Le signe de cette fraction rationnelle s'étudie à l'aide d'un tableau de signe. Mais le problème est le même que dans l'exercice précédent, il faut ordonner les trois valeurs $-2m$, $-m$ et m. Et cela dépend du signe de m.

- si $m < 0$, alors $m < -m < -2m$ et le tableau de signe s'écrit

x		m		$-m$		$-2m$	
$x+m$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-m$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+2m$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
Q	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$

- si $m = 0$, alors l'inéquation s'écrit $\dfrac{x^2}{x} > 0$,

- si $m > 0$, alors $-2m < -m < m$ et le tableau de signe s'écrit

x		$-2m$		$-m$		m	
$x+m$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-m$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+2m$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
Q	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$

On en déduit l'ensemble solution S en fonction de m :

- $m < 0$: $S = \,]m\,,\,-m[\cup]-2m\,,\,+\infty[$.
- $m = 0$: $S = \mathbb{R}_+^*$,
- $m > 0$: $S = \,]-2m\,,\,-m[\cup]m\,,\,+\infty[$.

6. Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

On définit la moyenne arithmétique m_a, la moyenne géométrique m_g et la moyenne harmonique m_h de ces deux nombres de la façon suivante :

$$m_a = \frac{1}{2}\,(a+b) \qquad m_g = \sqrt{a\,b} \qquad \frac{1}{m_h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

a) Comparer la moyenne arithmétique m_a et la moyenne géométrique m_g, c'est-à-dire établir si $m_a \le m_g$ ou si $m_a \ge m_g$.

b) Déduire de a) une comparaison entre la moyenne géométrique m_g et la moyenne harmonique m_h.

a) Comparer deux nombres revient à étudier le signe de leur différence. Etudions le signe de $m_a - m_g$.

$$m_a - m_g \;=\; \frac{1}{2}\,(a+b) - \sqrt{a\,b} \;=\; \frac{1}{2}\left(a+b-2\sqrt{a}\,\sqrt{b}\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$$

Donc $m_a - m_g \ge 0$ et $m_a \ge m_g$.

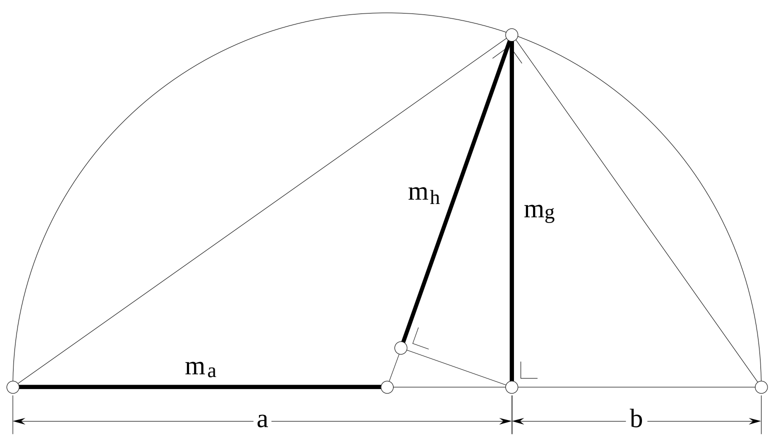
b) Posons $p = \frac{1}{a}$ et $q = \frac{1}{b}$; d'après a) nous savons que $\frac{1}{2}\,(p+q) \ge \sqrt{p\,q}$.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \ge \sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \ge \frac{1}{\sqrt{a\,b}} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{m_h} \ge \frac{1}{m_g}.$$

Donc $m_g \ge m_h$ car m_g et m_h sont strictement positifs.

En résumé : $m_a \ge m_g \ge m_h$.

Représentation géométrique des moyennes arithmétique m_a, géométrique m_g et harmonique m_h de deux nombres réels a et b strictement positifs :



La représentation de la moyenne géométrique m_g est une conséquence du théorème de la hauteur.

La représentation de la moyenne harmonique m_h se déduit de la relation $m_g^2 = m_a \cdot m_h$ (à vérifier) et du théorème d'Euclide.