# Corrigé 1

**1.** Etudier le signe de la quantité $P(x)$ en mettant au même dénominateur et/ou en factorisant.

a) $P(x) = -x^3 - 2x^2 - x$

b) $P(x) = (x+3)^2 - x - 3$

c) $P(x) = x^2 + x - 2$

d) $P(x) = x - \frac{4}{x}, x \neq 0$

e) $P(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1}, x \neq -1, 0$

---

a) En mettant en évidence $-x$, on obtient

$$P(x) = -x(x^2 + 2x + 1) = -x(x+1)^2.$$

On étudie le signe avec un tableau de signes :

| $x$ | | $-1$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-x$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $(x+1)^2$ | $+$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $P(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

En résumé :

- $P(x) < 0 \iff x \in ]0, +\infty[$
- $P(x) > 0 \iff x \in ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 0[$
- $P(x) = 0 \iff x \in \{-1, 0\}$

b) En factorisant on a

$$P(x) = (x+3)^2 - (x+3) = (x+3)(x+3-1) = (x+3)(x+2).$$

On étudie le signe avec un tableau de signes :

| $x$ | | $-3$ | | $-2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x+2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $P(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

En résumé :

- $P(x) < 0 \iff x \in ]-3, -2[$
- $P(x) > 0 \iff x \in ]-\infty, -3[ \cup ]-2, +\infty[$
- $P(x) = 0 \iff x \in \{-3, -2\}$

c) En factorisant on a

$$P(x) = x^2+x-1-1 = x^2-1+x-1 = (x-1)(x+1)+x-1 = (x-1)(x+1+1) = (x-1)(x+2).$$

On étudie le signe avec un tableau de signes :

| $x$ | | $-2$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $P(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

En résumé :

- $P(x) < 0 \iff x \in ]-2, 1[$
- $P(x) > 0 \iff x \in ]-\infty, -2[ \cup ]1, +\infty[$
- $P(x) = 0 \iff x \in \{-2, 1\}$

d) En mettant au même dénominateur, puis en factorisant, on a

$$P(x) = \frac{x^2-4}{x} = \frac{(x-2)(x+2)}{x}.$$

On étudie le signe avec un tableau de signes :

| $x$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x$ | $-$ | $-$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $P(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ |

En résumé :

- $P(x) < 0 \iff x \in ]-\infty, -2[ \cup ]0, 2[$
- $P(x) > 0 \iff x \in ]-2, 0[ \cup ]2, +\infty[$
- $P(x) = 0 \iff x \in \{-2, 2\}$

e) En mettant au même dénominateur, on a

$$P(x) = \frac{x+1-3x}{x(x+1)} = \frac{1-2x}{x(x+1)}.$$

On étudie le signe avec un tableau de signes :

| $x$ | | $-1$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1-2x$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $x+1$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x$ | $-$ | $-$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $P(x)$ | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ |

En résumé :

- $P(x) < 0 \iff x \in ]-1, 0[ \cup ]\frac{1}{2}, +\infty[$
- $P(x) > 0 \iff x \in ]-\infty, -1[ \cup ]0, \frac{1}{2}[$
- $P(x) = 0 \iff x \in \left\{\frac{1}{2}\right\}$

**2.** En étudiant le signe de la différence, comparer les quantités $P(x)$ et $Q(x)$ ci-dessous (c'est-à-dire déterminer pour quel intervalle a-t-on $P(x) > Q(x), P(x) < Q(x), P(x) = Q(x)$...)

*Indication : compléter les carrés*

a) $P(x) = x^2 + 6x, Q(x) = -5$

b) $P(x) = x^2 + 2x, Q(x) = -\frac{3}{4}$
c) $P(x) = x^2 + 3, Q(x) = -2x$
d) $P(x) = x^2 + 3, Q(x) = 2x$
e) $P(x) = x^5 + 2x^3, Q(x) = -9x$

---

a) On étudie le signe de $P(x) - Q(x)$. Si on ne voit pas immédiatement une factorisation, on peut compléter le carré.

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= x^2 + 6x + 5 = x^2 + 6x + 9 - 9 + 5 \\ &= (x+3)^2 - 4 = (x+3-2)(x+3+2) = (x+1)(x+5). \end{aligned}$$

On termine en étudiant le signe à l'aide d'un tabeau de signe :

| $x$ | | $-5$ | | $-1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+5$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $P(x)-Q(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

En résumé on a

- $P(x) > Q(x) \iff P(x) - Q(x) > 0 \iff x \in \left]-\infty, -5\right[ \cup \left]-1, +\infty\right[$
- $P(x) < Q(x) \iff P(x) - Q(x) < 0 \iff x \in \left]-5, -1\right[$
- $P(x) = Q(x) \iff P(x) - Q(x) = 0 \iff x \in \{-5, -1\}$.

b) On étudie le signe de $P(x) - Q(x)$. En complétant le carré, on a

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= x^2 + 2x + \frac{3}{4} = x^2 + 2x + 1 - 1 + \frac{3}{4} = (x+1)^2 - \frac{1}{4} \\ &= \left(x + 1 - \frac{1}{2}\right)\left(x + 1 + \frac{1}{2}\right) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

On termine en étudiant le signe à l'aide d'un tabeau de signe :

| $x$ | | $-3/2$ | | $-1/2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+\frac{1}{2}$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+\frac{3}{2}$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $P(x)-Q(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

En résumé on a

- $P(x) > Q(x) \iff P(x) - Q(x) > 0 \iff x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[ \cup \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$
- $P(x) < Q(x) \iff P(x) - Q(x) < 0 \iff x \in \left]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right[$
- $P(x) = Q(x) \iff P(x) - Q(x) = 0 \iff x \in \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$.

c) On étudie le signe de $P(x) - Q(x)$. En complétant le carré, on a

$$P(x) - Q(x) = x^2 + 3 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

En résumé pour tout $x \in \mathbb{R}$, on $P(x) - Q(x) > 0$ ce qui est équivalent à $P(x) > Q(x)$.

d) On étudie le signe de $P(x) - Q(x)$. En complétant le carré, on a

$$P(x) - Q(x) = x^2 + 3 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

En résumé pour tout $x \in \mathbb{R}$, on $P(x) - Q(x) > 0$ ce qui est équivalent à $P(x) > Q(x)$.

e) On étudie le signe de $P(x) - Q(x)$. En complétant le carré, on a

$$P(x) - Q(x) = x^5 + 2x^3 + 9x = x(x^4 + 2x^2 + 9) = x((x^2 + 1)^2 + 8)$$

$(x^2 + 1)^2 + 8$ est positif pour tout $x$. Par conséquent $P(x) - Q(x)$ dépend uniquement du signe du facteur $x$. En résumé on a donc

- $P(x) > Q(x) \iff P(x) - Q(x) > 0 \iff x > 0$
- $P(x) < Q(x) \iff P(x) - Q(x) < 0 \iff x < 0$
- $P(x) = Q(x) \iff P(x) - Q(x) = 0 \iff x = 0$

*Remarque: une méthode alternative est d'utiliser les points précédents:*

$$P(x) - Q(x) = x^5 + 2x^3 + 9x = x(x^4 + 2x^2 + 9) = x(x^4 + 6x^2 - 6x^2 + 2x^2 + 9)$$
$$= x((x^2+3)^2 - 4x^2) = x(x^2+3-2x)(x^2+3-2x) = x(x^2-2x+3)(x^2+2x+3).$$

*On sait que pour tout $x$, on a $x^2-2x+3 > 0$ et $x^2+2x+3 > 0$. Par conséquent $P(x) - Q(x)$ dépend uniquement du signe du facteur $x$.*

**3.** En étudiant le signe de la différence, comparer les quantités $P(x)$ et $Q(x)$ ci-dessous (c'est-à-dire déterminer pour quel intervalle a-t-on $P(x) > Q(x), P(x) < Q(x), P(x) = Q(x)$...) *Indication : mettre au même dénominateur*

a) $P(x) = \frac{1}{1-x}, Q(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0, 1$

b) $P(x) = \frac{x^2}{2}, Q(x) = \frac{4}{x}, x \neq 0$ (Vérifier au préalable que la quantité $x^2+2x+4 > 0$ pour tout $x$).

c) $P(x) = \frac{3x+9}{2x+6}, Q(x) = \frac{3x}{2x+2}, x \neq -3, -1$

---

a) On étudie le signe de $P(x) - Q(x)$ en mettant au même dénominateur :

$$P(x) - Q(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} = \frac{x - (1-x)}{x(1-x)} = \frac{2x-1}{x(1-x)}.$$

On termine par un tableau de signe :

| $x$ | | $0$ | | $1/2$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $1-x$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $\|\|$ | $-$ |
| $x$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $P(x)-Q(x)$ | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\|\|$ | $-$ |

En résumé on a donc

- $P(x) > Q(x) \iff P(x) - Q(x) > 0 \iff x \in ]-\infty, 0[ \cup ]\frac{1}{2}, 1[$
- $P(x) < Q(x) \iff P(x) - Q(x) < 0 \iff x \in ]0, \frac{1}{2}[ \cup ]1, +\infty[$
- $P(x) = Q(x) \iff P(x) - Q(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$

b) On étudie le signe de $P(x) - Q(x)$ en mettant au même dénominateur :

$$P(x) - Q(x) = \frac{x^3 - 8}{2x} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{2x}.$$

En complétant le carré, on peut montrer que $x^2 + 2x + 4 > 0$ pour tout $x$. En effet :

$$x^2 + 2x + 4 = x^2 + 2x + 1 - 1 + 4 = (x+1)^2 + 3 > 0.$$

On termine par un tableau de signe :

| $x$ | | $0$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x^2+2x+4$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $2x$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $P(x)-Q(x)$ | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ |

En résumé on a donc

- $P(x) > Q(x) \iff P(x) - Q(x) > 0 \iff x \in ]-\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[$
- $P(x) < Q(x) \iff P(x) - Q(x) < 0 \iff x \in ]0, 2[$
- $P(x) = Q(x) \iff P(x) - Q(x) = 0 \iff x = 2$

c) On étudie le signe de $P(x) - Q(x)$ en mettant au même dénominateur :

$$P(x) - Q(x) = \frac{(3x+9)}{2(x+3)(x+1)} = \frac{3(x+3)}{2(x+3)(x+1)}.$$

On termine par un tableau de signe :

| $x$ | | $-3$ | | $-1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x+3$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ |
| $P(x)-Q(x)$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ |

En résumé on a donc

- $P(x) > Q(x) \iff P(x) - Q(x) > 0 \iff x > -1$
- $P(x) < Q(x) \iff P(x) - Q(x) < 0 \iff x \in ]-\infty, -3[ \cup ]-3, -1[$
- $P(x)$ n'est jamais égal à $Q(x)$.

*Attention : il est mieux de ne pas simplifier par $x+3$ car la quantité $P(x) - Q(x)$ n'est pas définie en $x = -3$. On risque sinon d'oublier de retirer ce cas du résumé final.*

**4.** En comparant les quantités par une étude du signe de la différence, montrer que

a) pour tout $x > -1$, $\frac{x}{x+1} < 1$

b) pour tout $x > 0$, $\frac{x^2+1}{x} \geq -2$.

---

a) Le problème est équivalent à montrer que

$$\text{pour tout } x > -1, \frac{x}{x+1} - 1 < 0 \iff \text{pour tout } x > -1, \frac{-1}{x+1} < 0.$$

On termine alors par une étude de signe, à l'aide d'un tableau, pour la quantité $P(x) = \frac{-1}{x+1}$

| $x$ | | $-1$ | |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $x+1$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ |
| $P(x)$ | $+$ | $\|\|$ | $-$ |

En lisant le tableau de signe, on conclue alors que $P(x) < 0 \iff x > -1$, ce qui est équivalent à ce qui est demandé.

b) Le problème est équivalent à montrer que

$$\text{pour tout } x > 0, \frac{x^2+1}{x} + 2 \geq 0 \iff \text{pour tout } x > 0, \frac{x^2+1+2x}{x} \geq 0$$

$$\iff \text{pour tout } x > 0, \frac{(x+1)^2}{x} \geq 0.$$

On termine par une étude de signe de la quantité $P(x) = \frac{(x+1)^2}{x}$ :

| $x$ | | $-1$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $(x+1)^2$ | $+$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x$ | $-$ | $-$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ |
| $P(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ |

*Remaque : il est possible de conclure "rapidement" en observant que* $(x+1)^2 \geq 0$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *dès lors le signe de* $\frac{(x+1)^2}{x}$ *ne dépend que du signe de* $x$.

**5.** Rendre rationnel (sans racines) le dénominateur des expressions suivantes.

a) $A = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$, b) $B = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-2\sqrt{3}}$, c) $C = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+1}-1}$,

d) $D = \dfrac{1}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}}$, e) $E = \dfrac{x^2}{2+x+\sqrt[3]{x^2-12x-8}}$.

---

a) $A = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \cdot \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2-1} = 3-2\sqrt{2}$.

b) $B = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-2\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{7}+2\sqrt{3}}{\sqrt{7}+2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{7}\left(\sqrt{7}+2\sqrt{3}\right)}{7-4\cdot 3} = -\dfrac{7+2\sqrt{21}}{5}\,.$

c) $$C = \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+x+1}+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1} = \frac{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{(x^2+x+1)-1}$$
$$= \frac{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{x^2+x} = \frac{\sqrt{x^2+x+1}+1}{x+1}\,.$$

d) $D = \dfrac{1}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}}{5}\,.$

e) $$E = \frac{x^2}{2+x+\sqrt[3]{x^2-12x-8}} \cdot \frac{(2+x)^2-(2+x)\sqrt[3]{x^2-12x-8}+\sqrt[3]{(x^2-12x-8)^2}}{(2+x)^2-(2+x)\sqrt[3]{x^2-12x-8}+\sqrt[3]{(x^2-12x-8)^2}}$$
$$= \frac{x^2\left[(2+x)^2-(2+x)\sqrt[3]{x^2-12x-8}+\sqrt[3]{(x^2-12x-8)^2}\right]}{(2+x)^3+(x^2-12x-8)}$$
$$= \frac{x^2\left[(2+x)^2-(2+x)\sqrt[3]{x^2-12x-8}+\sqrt[3]{(x^2-12x-8)^2}\right]}{(8+12x+6x^2+x^3)+(x^2-12x-8)}\,.$$
$$= \frac{(2+x)^2-(2+x)\sqrt[3]{x^2-12x-8}+\sqrt[3]{(x^2-12x-8)^2}}{x+7}\,.$$

**6.** Déterminer $a$ et $b$ pour lesquels $z \in [a,b]$ pour chacun des cas ci-dessous

a) $x \in [1,2], y \in [-1,1], z = x+y$

b) $x \in [2,3], y \in [-1,3], z = x-y$

---

Dans cet exercice, on rappelle les règles de calcul suivantes :

- On peut sommer des inégalités mais pas les soustraire.
- Si on multiplie ou divise une inégalité par une quantité négative, on doit changer le sens de l'inégalité.

a) On a $1 \le x \le 2$ et $-1 \le y \le 1$. En appliquant la règle pour sommer des inégalités, on a
$$0 \le z \le 3 \iff z \in [0,3].$$

b) On a $2 \le x \le 3$ et $-1 \le y \le 3 \iff -3 \le -y \le 1$. Puisque $x-y = x+(-y)$, en sommant les inégalités on a
$$2-3 \le x+(-y) \le 3+1 \iff -1 \le x-y \le 4 \iff z \in [-1,4].$$

---