Corrigé 12

1. Estimer, à l'aide de l'approximation linéaire, la quantité $\sqrt[4]{16,032}$.

Soient $f(x)=\sqrt[4]{x}$, $\quad x_0=16 \quad$ et $\quad \Delta x = 0,032$.

L'approximation linéaire de $f(x_0+\Delta x)$ en x_0 s'écrit $A=f(x_0)+\Delta x\cdot f'(x_0)$.

$$f'(x)=\tfrac{1}{4}\,x^{-3/4}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}\,,\quad f'(x_0)=\frac{1}{32}.\quad A\;=\;\sqrt[4]{16}+0,032\cdot\frac{1}{32}\;=\;2,001\,.$$

2. Soient $g(x)$ la fonction définie par

$$g(x)=\frac{1+\sqrt{16+x^2}}{1-\sqrt{25-x^2}}$$

et $f(x)$ une fonction définie dans un voisinage de x_0 telle que $f(x_0)=3$.

Soient A l'approximation linéaire de $f(x_0+\Delta x)$ en x_0 et B l'approximation linéaire de $(g\circ f)(x_0+\Delta x)$ en x_0 pour un Δx donné.

Sachant que $A=\dfrac{22}{7}$, en déduire la valeur de B.

L'approximation linéaire B de $(g\circ f)(x_0+\Delta x)$ en x_0 s'écrit

$$B\;=\;(g\circ f)(x_0)+(g\circ f)'(x_0)\cdot\Delta x\;=\;g\,[f(x_0)\,]+g'\,[f(x_0)\,]\cdot f'(x_0)\cdot\Delta x\,.$$

- Calcul de $g\,[f(x_0)\,]$

$$g\,[f(x_0)\,]\;=\;g(3)\;=\;\left.\frac{1+\sqrt{16+x^2}}{1-\sqrt{25-x^2}}\right|_{x=3}\;=\;\frac{1+5}{1-4}\;=\;-2$$

- Calcul de $g'\,[f(x_0)\,]$

  - Fonction dérivée $g'(x)$

$$g'(x)\;=\;\frac{\frac{2x}{2\sqrt{16+x^2}}\cdot(1-\sqrt{25-x^2}\,)-(1+\sqrt{16+x^2}\,)\cdot\frac{-2x}{-2\sqrt{25-x^2}}}{(1-\sqrt{25-x^2}\,)^2}\,.$$

  - Evaluation

$$g'\,[f(x_0)\,]\;=\;g'(3)\;=\;\frac{\frac{3}{5}\cdot(1-4)-(1+5)\cdot\frac{3}{4}}{(1-4)^2}\;=\;-\frac{1}{5}-\frac{2}{4}\;=\;-\frac{7}{10}\,.$$

- Calcul de $f'(x_0)\cdot\Delta x$

  L'approximation linéaire A de $f(x_0+\Delta x)$ en x_0 s'écrit
  $$A \;=\; f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x\,.$$
  Connaissant $A=\frac{22}{7}$ et $f(x_0)=3$, on en déduit la valeur de $f'(x_0)\cdot\Delta x$:
  $$A \;=\; f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x \quad\Leftrightarrow\quad f'(x_0)\cdot\Delta x \;=\; A-f(x_0)$$
  $$\Leftrightarrow\quad f'(x_0)\cdot\Delta x \;=\; \frac{22}{7}-3 \;=\; \frac{1}{7}\,.$$

- Conclusion
  $$B \;=\; (g\circ f)(x_0)+(g\circ f)'(x_0)\cdot\Delta x \;=\; g\,[f(x_0)\,]+g'\,[f(x_0)\,]\cdot f'(x_0)\cdot\Delta x\,,$$
  $$B \;=\; (-2)+\left(-\frac{7}{10}\right)\cdot\frac{1}{7} \;=\; -2,1\,.$$

3. Soit $f(x)=x^2\cdot(2-x^2)$.

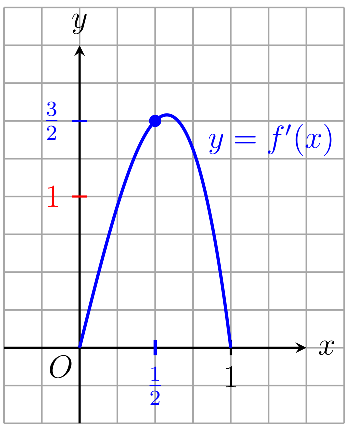
Montrer qu'il existe au moins un point d'abscisse $x\in\,]\,0\,,\,1\,[$ tel que la droite tangente au graphe de f en ce point soit parallèle à la droite d d'équation $x-y=4$.

La pente de la droite d vaut $m=1$. La pente de la tangente au graphe de f en x est égale à m si et seulement si $f'(x)=1$:
$$f'(x)=2x\,(2-x^2)+x^2\,(-2x)=2x\,(2-2x^2)=4x\,(1-x^2)\,.$$
$$f'(x)=1 \quad\Leftrightarrow\quad 4x\,(1-x^2)=1\,.$$
Comment montrer que cette équation admet au moins une solution sur l'intervalle $]\,0\,,\,1\,[$?

- En utilisant le théorème de la valeur intermédiaire

  La fonction f', restreinte à l'intervalle $[\,0\,,\,1\,]$, est une fonction polynomiale, elle est donc continue. Mais $y=1$ appartient-il à son ensemble image ?
  $$f'(0)=f'(1)=0 \qquad\text{et}\qquad f'(\tfrac{1}{2})=\tfrac{3}{2}\,,$$
  donc $\quad [\,0\,,\,\frac{3}{2}\,]\subset \operatorname{Im} f' \quad$ et $\quad y=1\in\operatorname{Im} f'$.

  Par le théorème de la valeur intermédiaire, on en conclut que l'équation $f'(x)=1$ admet au moins une solution sur l'intervalle $]\,0\,,\,1\,[$.



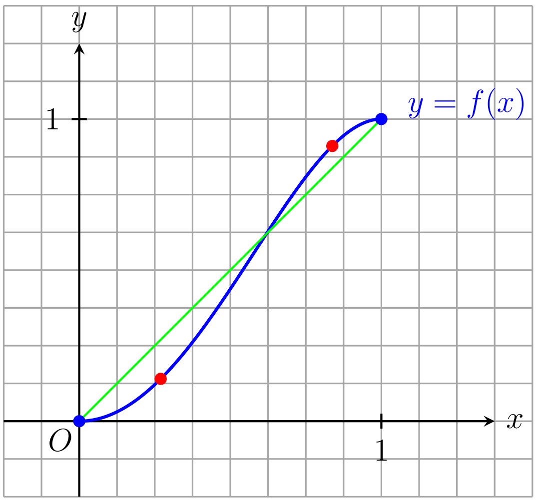
La deuxième méthode, qui utilise le théorème des accroissements finis, est dans ce cas là beaucoup plus simple !

- Deuxième méthode

$f(0)=0$ et $f(1)=1$, donc la sécante passant par $(0, f(0))$ et $(1, f(1))$ a pour pente $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$.

Or f est continue sur $[\,0\,,\,1\,]$ et dérivable sur $]\,0\,,\,1\,[$, on peut donc lui appliquer le théorème des accroissements finis :

$$\exists\, x \in\,]\,0\,,\,1\,[\quad \text{tel que} \quad f'(x)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \quad \Leftrightarrow \quad f'(x)=1\,.$$



4. On considère la fonction $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2} & \text{si} \quad x\leq 1\\[2mm] \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

a) Montrer que f vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis sur $[\,0\,,\,2\,]$, et en déduire qu'il existe $c\in\,]\,0\,,\,2\,[$ tel que $f(2)-f(0)=(2-0)\,f'(c)$.

b) Déterminer toutes les valeurs de c.

---

a) Montrons que f vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[\,0\,,\,2\,]$.

Il faut donc vérifier que f est continue sur $[\,0\,,\,2\,]$ et dérivable sur $]\,0\,,\,2\,[$.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, car $y=\dfrac{3-x^2}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $y=\dfrac{1}{x}$ est continue sur $]\,1\,,\,+\infty\,[$.

  Que se passe-t-il en $x_0=1$?

  $$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{3-x^2}{2}=1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x}=1\,.$$

  On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to1} f(x)=1$. Or $f(1)=\left.\dfrac{3-x^2}{2}\right|_{x=1}=1$, donc f est continue en $x=1$.

  f est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier f est continue sur $[\,0\,,\,2\,]$.

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, car $y=\dfrac{3-x^2}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $y=\dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]\,1\,,\,+\infty\,[$.

  Que se passe-t-il en $x_0=1$?

  ◦ $$\lim_{h\to0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{\frac{3-(1+h)^2}{2}-1}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{-2\,h-h^2}{2\,h}=-1\,.$$

  ◦ $$\lim_{h\to0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\frac{1}{1+h}-1}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{-h}{h\,(1+h)}=-1\,.$$

  Les nombres dérivés $f'(1^-)$ et $f'(1^+)$ coïncident, donc f est dérivable en $x=1$.

  f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier f est dérivable sur $]\,0\,,\,2\,[$.

- Conclusion :

  f est continue sur $[\,0\,,\,2\,]$ et dérivable sur $]\,0\,,\,2\,[$, on peut donc appliquer le théorème des accroissements finis :

  $$\exists\, c\in\,]\,0\,,\,2\,[\ \text{ tel que }\ \frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)\,,\quad f(2)-f(0)=(2-0)\,f'(c)\,.$$

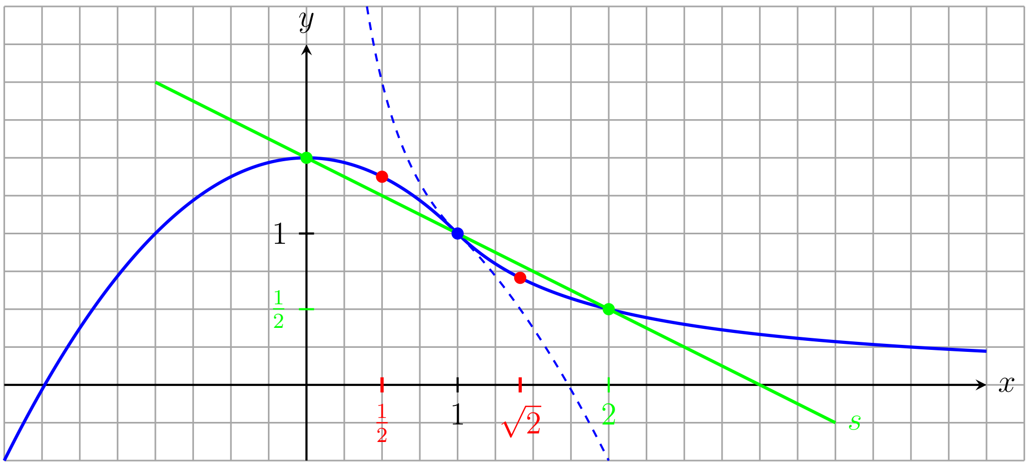
b) On cherche à résoudre sur l'intervalle $]\,0\,,\,2\,[$, l'équation suivante :

$$f(2)-f(0)=(2-0)\,f'(c) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}-\frac{3}{2}=2\,f'(c) \quad\Leftrightarrow\quad f'(c)=-\frac{1}{2}\,.$$

Mais l'expression de f étant différente à gauche et à droite de $x=1$, on distingue les deux cas suivants :

- si $c\in\,]\,0\,,\,1\,[$, $\quad f'(c)=-\dfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad -c=-\dfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad c=\dfrac{1}{2}$,
- si $c\in\,]\,1\,,\,2\,[$, $\quad f'(c)=-\dfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad -\dfrac{1}{c^2}=-\dfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad c=\pm\sqrt{2} \quad\Leftrightarrow\quad c=+\sqrt{2}$.

Illustration :



5. Dériver sur $\mathbb{R}^*$ les deux fonctions suivantes :

a) $\sqrt[3]{x} = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}} & \text{si } x \geq 0 \\ -(-x)^{\frac{1}{3}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ b) $\sqrt[5]{x^2} = \begin{cases} x^{\frac{2}{5}} & \text{si } x \geq 0 \\ (-x)^{\frac{2}{5}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

---

a) Rappel : l'expression x^q, $q \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ n'est définie que sur les x positifs.

On peut donc dériver $\sqrt[3]{x}$ sur les x positifs en dérivant la fonction $x^{\frac{1}{3}}$.
Puis on montrera que le résultat obtenu est aussi valable sur les x négatifs.

- Dérivée de $f(x)$ sur les x positifs :

$$f'(x) = \left[\sqrt[3]{x}\right]' = \left[x^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad \forall\, x > 0\,.$$

- Dérivée de $f(x)$ sur les x négatifs :

$$f'(x) = \left[\sqrt[3]{x}\right]' = \left[-(-x)^{\frac{1}{3}}\right]' = -\frac{1}{3}\cdot(-x)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(-x)' = -\frac{1}{3}\cdot(-x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-1)\,,$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (-x)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(-x)^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad \forall\, x < 0\,.$$

On en déduit que l'expression obtenue en dérivant $\sqrt[3]{x}$ sur les x positifs, reste valable pour les x négatifs :

$$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*.$$

Remarque : la dérivée d'une fonction impaire est paire, donc sachant que $f(x)$ est impaire, on pouvait directement conclure :

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad \forall\, x > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*.$$

b) On dérive la fonction $\sqrt[5]{x^2}$ sur les x positifs en dérivant la fonction $x^{\frac{2}{5}}$, puis on vérifie que le résultat obtenu est aussi valable sur les x négatifs.

- Dérivée de $g(x)$ sur les x positifs :

$$g'(x) = \left[\sqrt[5]{x^2}\right]' = \left[x^{\frac{2}{5}}\right]' = \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5} \cdot x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}, \quad \forall\, x > 0\,.$$

- Dérivée de $g(x)$ sur les x négatifs :

$$g'(x) = \left[\sqrt[5]{x^2}\right]' = \left[(-x)^{\frac{2}{5}}\right]' = \frac{2}{5} \cdot (-x)^{\frac{2}{5}-1} \cdot (-x)' = \frac{2}{5} \cdot (-x)^{-\frac{3}{5}} \cdot (-1)\,,$$

$$g'(x) = -\frac{2}{5} \cdot (-x)^{-\frac{3}{5}} = -\frac{2}{5\sqrt[5]{(-x)^3}} = -\frac{2}{5\sqrt[5]{-x^3}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}, \quad \forall\, x < 0\,.$$

On en déduit que l'expression obtenue en dérivant $\sqrt[5]{x^2}$ sur les x positifs, reste valable pour les x négatifs :

$$(\sqrt[5]{x^2}\,)' = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*.$$

Remarque : la dérivée d'une fonction paire est impaire, donc sachant que $g(x)$ est paire, on pouvait directement conclure

$$g'(x) = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}, \quad \forall\, x > 0 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*.$$

6. Parmi les énoncés suivants, déterminer s'ils sont vrais ou faux. S'ils sont vrais, justifier. S'ils sont faux, donner un contre-exemple.

a) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $f' :]a,b[\to \mathbb{R}$ est bornée. Alors il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x, y \in [a,b]$ avec $x \neq y$ on a

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq M.$$

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que sa fonction dérivée f' est continue sur $\mathbb{R}$. On suppose de plus que $f(0) = 0$. Alors

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq \max_{x\in[0,1]} |f'(x)|.$$

c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soient $a \neq b$ tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Alors soit f est continue sur $[a,b]$, soit f ne s'annule jamais sur $[a,b]$.

d) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que

- f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et f dérivable à droite de $x = 0$,
- f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et f dérivable à gauche de $x = 0$.

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Vrai. Puisque f' est borné, il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leq M$. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $x, y \in [a, b]$, il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y).$$

Par conséquent,

$$|f(x) - (y)| = |f'(c)||x - y|$$

ce qui implique

$$|f(x) - (y)| \leq M|x - y|.$$

D'où le résultat.

b) Vrai. Soit $x \in]0, 1]$. Par le théorème des accroissements finis, on a qu'il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0) \Leftrightarrow f(x) = f'(c) \cdot x.$$

Par conséquent,

$$|f(x)| = |f'(c)| \cdot \underbrace{|x|}_{\leq 1} \leq |f'(c)| \leq \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|.$$

On a donc

$$|f(x)| \leq \max_{x \in [0,1]} |f'(x)| \text{pour tout } x \in]0, 1], \text{ et } f(0) = 0 \leq \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|.$$

Par conséquent on a bien

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x)| \leq \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|.$$

Remarque : on a pu prendre le maximum de f et f' car chacune est continue sur l'intervalle fermé et borné $[0, 1]$.

c) Faux. En effet la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

s'annule en $x = 0$ mais n'est pas continue.

d) Faux. Prendre par exemple $f(x) = |x|$.