Chapitre 3.

Fonction réelle d'une variable réelle

Chapitre 3.

Fonction réelle d'une variable réelle

3. Limite en x_0

Limites infinies en x_0

Définitions :

Limites infinies en x_0

Définitions :

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$

Limites infinies en x_0

Définitions :

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage épointé de x_0.

Limites infinies en x_0

Définitions :

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage épointé de x_0.

- f diverge vers $+\infty$ lorsque $x \to x_0$,

Limites infinies en x_0

Définitions :

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage épointé de x_0.

- f diverge vers $+\infty$ lorsque $x \to x_0$, on écrit alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$,

Limites infinies en x_0

Définitions :

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage épointé de x_0.

- f diverge vers $+\infty$ lorsque $x \to x_0$, on écrit alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, si

  $\forall A > 0,$

Limites infinies en x_0

Définitions :

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage épointé de x_0.

- f diverge vers $+\infty$ lorsque $x \to x_0$, on écrit alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A > 0, \quad \exists \delta > 0$$

Limites infinies en x_0

Définitions :

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage épointé de x_0.

- f diverge vers $+\infty$ lorsque $x \to x_0$, on écrit alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > A.$$

Limites infinies en x_0

Définitions :

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage épointé de x_0.

- f diverge vers $+\infty$ lorsque $x \to x_0$, on écrit alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > A.$$

- f diverge vers $-\infty$ lorsque $x \to x_0$

Limites infinies en x_0

Définitions :

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage épointé de x_0.

- f diverge vers $+\infty$ lorsque $x \to x_0$, on écrit alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, si
$$\forall A > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > A.$$

- f diverge vers $-\infty$ lorsque $x \to x_0$ et on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Limites infinies en x_0

Définitions :

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage épointé de x_0.

- f diverge vers $+\infty$ lorsque $x \to x_0$, on écrit alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > A.$$

- f diverge vers $-\infty$ lorsque $x \to x_0$ et on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si,

$$\forall B < 0,$$

Limites infinies en x_0

Définitions :

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage épointé de x_0.

- f diverge vers $+\infty$ lorsque $x \to x_0$, on écrit alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > A.$$

- f diverge vers $-\infty$ lorsque $x \to x_0$ et on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si,

$$\forall B < 0, \quad \exists \delta > 0$$

Limites infinies en x_0

Définitions :

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage épointé de x_0.

- f diverge vers $+\infty$ lorsque $x \to x_0$, on écrit alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > A.$$

- f diverge vers $-\infty$ lorsque $x \to x_0$ et on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si,

$$\forall B < 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < B.$$

Exemple

Exemple :

Exemple

Exemple :

Montrons que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

Exemple

Exemple :

Montrons que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

Soit $A > 0$ donné.

Exemple

Exemple :

Montrons que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Soit $A > 0$ donné.

Montrons que $\exists\, \delta > 0$

Exemple

Exemple :

Montrons que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

Soit $A > 0$ donné.

Montrons que $\exists\, \delta > 0$ tel que

$0 < |\, x - 0\,| < \delta \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x^2} > A$.

Exemple

Exemple :

Montrons que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Soit $A > 0$ donné.

Montrons que $\exists\, \delta > 0$ tel que

$$0 < |\, x - 0\,| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} > A\,.$$

Or $\frac{1}{x^2} > A \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{A}}$,

Exemple

Exemple :

Montrons que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Soit $A > 0$ donné.

Montrons que $\exists\, \delta > 0$ tel que

$0 < |\, x - 0 \,| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} > A$.

Or $\frac{1}{x^2} > A \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{A}}$,

donc tout $0 < \delta \leq \frac{1}{\sqrt{A}}$ convient.

Exemple

Exemple :

Montrons que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

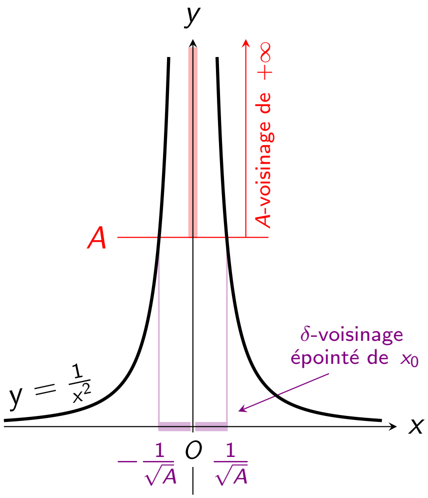
Soit $A > 0$ donné.

Montrons que $\exists\, \delta > 0$ tel que

$0 < |\, x - 0\,| < \delta \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x^2} > A$.

Or $\dfrac{1}{x^2} > A \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \dfrac{1}{\sqrt{A}}$,

donc tout $0 < \delta \leq \dfrac{1}{\sqrt{A}}$ convient.



Limites infinies à gauche ou à droite de x_0

Définitions :

Limites infinies à gauche ou à droite de x_0

Définitions :

- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à gauche de x_0.

Limites infinies à gauche ou à droite de x_0

Définitions :

- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à gauche de x_0.

  $*$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$

Limites infinies à gauche ou à droite de x_0

Définitions :

- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à gauche de x_0.

  $*$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ essayez de rédiger vous-même cette définition

Limites infinies à gauche ou à droite de x_0

Définitions :

- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à gauche de x_0.

  $*$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$

Limites infinies à gauche ou à droite de x_0

Définitions :

- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à gauche de x_0.

  $*$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ si $\forall A > 0\,,\ \exists\, \delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \;\Rightarrow\; f(x) > A$.

Limites infinies à gauche ou à droite de x_0

Définitions :

- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à gauche de x_0.
  - $\ast$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ si $\forall A > 0\,,\ \exists \delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \ \Rightarrow\ f(x) > A$.
  - $\ast$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$

Limites infinies à gauche ou à droite de x_0

Définitions :

- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à gauche de x_0.

  - $\ast$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ si $\forall A > 0, \exists \delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > A$.
  - $\ast$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ ici aussi

Limites infinies à gauche ou à droite de x_0

Définitions :

- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à gauche de x_0.

  $*$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ si $\forall A > 0 \,, \exists \delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > A$.

  $*$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$

Limites infinies à gauche ou à droite de x_0

Définitions :

- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à gauche de x_0.
  - $*$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ si $\forall A > 0, \exists \delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > A$.
  - $*$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ si $\forall B < 0, \exists \delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < B$.

Limites infinies à gauche ou à droite de x_0

Définitions :

- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à gauche de x_0.
  - $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ si $\forall A > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > A$.
  - $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ si $\forall B < 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < B$.
- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à droite de x_0.

Limites infinies à gauche ou à droite de x_0

Définitions :

- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à gauche de x_0.

  $*$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ si $\forall A > 0\,,\ \exists\,\delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \;\Rightarrow\; f(x) > A$.

  $*$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ si $\forall B < 0\,,\ \exists\,\delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \;\Rightarrow\; f(x) < B$.

- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à droite de x_0.

  $*$ $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$

Limites infinies à gauche ou à droite de x_0

Définitions :

- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à gauche de x_0 .
  - $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ si $\forall A > 0\,,\ \exists \delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \ \Rightarrow\ f(x) > A$.
  - $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ si $\forall B < 0\,,\ \exists \delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \ \Rightarrow\ f(x) < B$.
- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à droite de x_0 .
  - $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ et là encore

Limites infinies à gauche ou à droite de x_0

Définitions :

- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à gauche de x_0.
  - $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ si $\forall A > 0\,,\ \exists \delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > A$.
  - $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ si $\forall B < 0\,,\ \exists \delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < B$.
- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à droite de x_0.
  - $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$

Limites infinies à gauche ou à droite de x_0

Définitions :

- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à gauche de x_0.

  $*$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ si $\forall A > 0, \exists \delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > A$.

  $*$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ si $\forall B < 0, \exists \delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < B$.

- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à droite de x_0.

  $*$ $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ si $\forall A > 0, \exists \delta > 0$ tel que $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) > A$.

Limites infinies à gauche ou à droite de x_0

Définitions :

- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à gauche de x_0.
  - $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ si $\forall A > 0, \exists \delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > A$.
  - $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ si $\forall B < 0, \exists \delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < B$.
- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à droite de x_0.
  - $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ si $\forall A > 0, \exists \delta > 0$ tel que $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) > A$.
  - $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

Limites infinies à gauche ou à droite de x_0

Définitions :

- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à gauche de x_0.
  - $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ si $\forall A > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > A$.
  - $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ si $\forall B < 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < B$.
- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à droite de x_0.
  - $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ si $\forall A > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) > A$.
  - $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ et pour finir

Limites infinies à gauche ou à droite de x_0

Définitions :

- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à gauche de x_0.

  * $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ si $\forall A > 0\,,\ \exists \delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > A$.
  * $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ si $\forall B < 0\,,\ \exists \delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < B$.

- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à droite de x_0.

  * $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ si $\forall A > 0\,,\ \exists \delta > 0$ tel que $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) > A$.
  * $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

Limites infinies à gauche ou à droite de x_0

Définitions :

- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à gauche de x_0.

  $*$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ si $\forall A > 0, \exists \delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > A$.

  $*$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ si $\forall B < 0, \exists \delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < B$.

- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à droite de x_0.

  $*$ $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ si $\forall A > 0, \exists \delta > 0$ tel que $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) > A$.

  $*$ $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ si $\forall B < 0, \exists \delta > 0$ tel que $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) < B$.

Exemple

Exemple :

Exemple

Exemple :

Vérifions que $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Exemple

Exemple :

Vérifions que $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Soit $B < 0$ donné.

Exemple

Exemple :

Vérifions que $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Soit $B < 0$ donné.

Montrons que $\exists \, \delta > 0$

Exemple

Exemple :

Vérifions que $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Soit $B < 0$ donné.

Montrons que $\exists\, \delta > 0$ tel que

$$-\delta < x < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} < B \, .$$

Exemple

Exemple :

Vérifions que $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Soit $B < 0$ donné.

Montrons que $\exists\, \delta > 0$ tel que

$-\delta < x < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} < B$.

Or $\frac{1}{x} < B \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{B}$,

Exemple

Exemple :

Vérifions que $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Soit $B < 0$ donné.

Montrons que $\exists\, \delta > 0$ tel que

$-\delta < x < 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x} < B$.

Or $\dfrac{1}{x} < B \quad \Leftrightarrow \quad x > \dfrac{1}{B}$,

car $x < 0$ et $B < 0$.

Exemple

Exemple :

Vérifions que $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

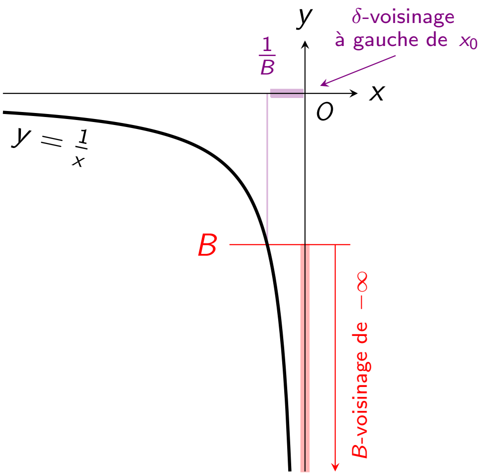
Soit $B < 0$ donné.

Montrons que $\exists\, \delta > 0$ tel que

$-\delta < x < 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x} < B$.

Or $\dfrac{1}{x} < B \quad \Leftrightarrow \quad x > \dfrac{1}{B}$,

car $x < 0$ et $B < 0$.

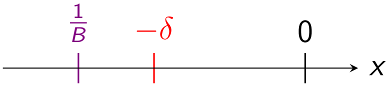


Exemple

Pour que l'intervalle $]-\delta\,,\,0\,[$ soit contenu dans l'intervalle $]\,\frac{1}{B}\,,\,0\,[$,

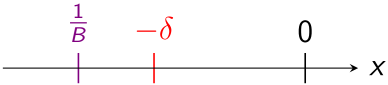
Exemple

Pour que l'intervalle $]-\delta\,,\,0\,[$ soit contenu dans l'intervalle $]\,\frac{1}{B}\,,\,0\,[$,



Exemple

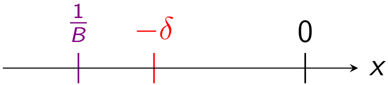
Pour que l'intervalle $\left]-\delta\,,0\right[$ soit contenu dans l'intervalle $\left]\frac{1}{B}\,,0\right[$,



il faut et il suffit que $0 > -\delta \geq \frac{1}{B}$,

Exemple

Pour que l'intervalle $\left]-\delta\,,\,0\right[$ soit contenu dans l'intervalle $\left]\frac{1}{B}\,,\,0\right[$,

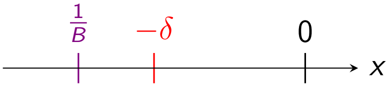


il faut et il suffit que $0 > -\delta \geq \frac{1}{B}$,

c'est-à-dire que $0 < \delta \leq -\frac{1}{B}$.

Exemple

Pour que l'intervalle $\left]-\delta\,,0\right[$ soit contenu dans l'intervalle $\left]\frac{1}{B}\,,0\right[$,

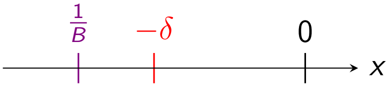


il faut et il suffit que $0 > -\delta \geq \frac{1}{B}$,
c'est-à-dire que $0 < \delta \leq -\frac{1}{B}$.

On montre de façon analogue que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

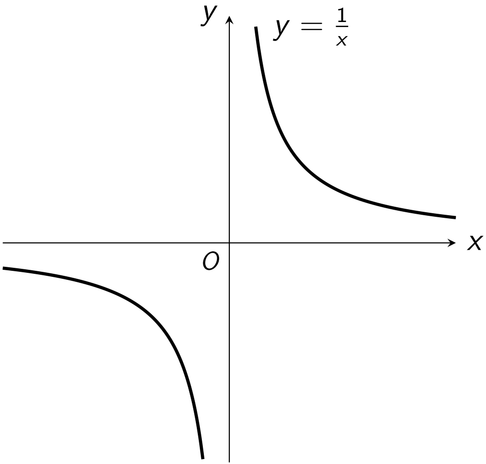
Exemple

Pour que l'intervalle $\left]-\delta\,,\,0\right[$ soit contenu dans l'intervalle $\left]\frac{1}{B}\,,\,0\right[$,



il faut et il suffit que $0 > -\delta \geq \frac{1}{B}$, c'est-à-dire que $0 < \delta \leq -\frac{1}{B}$.

On montre de façon analogue que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.



Règles de calcul

Remarque :

Règles de calcul

Remarque : Tous les cas d'indéterminations et tous les théorèmes énoncés sur les limites à l'infini

Règles de calcul

Remarque : Tous les cas d'indéterminations et tous les théorèmes énoncés sur les limites à l'infini restent valables pour les limites en x_0.

Règles de calcul

Remarque : Tous les cas d'indéterminations et tous les théorèmes énoncés sur les limites à l'infini restent valables pour les limites en x_0.

Exemple :

Règles de calcul

Remarque : Tous les cas d'indéterminations et tous les théorèmes énoncés sur les limites à l'infini restent valables pour les limites en x_0 .

Exemple :

Déterminer, si elle existe, la limite suivante :

Règles de calcul

Remarque : Tous les cas d'indéterminations et tous les théorèmes énoncés sur les limites à l'infini restent valables pour les limites en x_0.

Exemple :

Déterminer, si elle existe, la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - \sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} \cdot \cos\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

Règles de calcul

Remarque : Tous les cas d'indéterminations et tous les théorèmes énoncés sur les limites à l'infini restent valables pour les limites en x_0 .

Exemple :

Déterminer, si elle existe, la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{x^2-1}} \cdot \cos\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

La fonction $\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)$ n'admet pas de limite lorsque $x \to 1$,

Règles de calcul

Remarque : Tous les cas d'indéterminations et tous les théorèmes énoncés sur les limites à l'infini restent valables pour les limites en x_0.

Exemple :
Déterminer, si elle existe, la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - \sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{x^2-1}} \cdot \cos\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

La fonction $\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)$ n'admet pas de limite lorsque $x \to 1$, mais est bornée.

Règles de calcul

Remarque : Tous les cas d'indéterminations et tous les théorèmes énoncés sur les limites à l'infini restent valables pour les limites en x_0.

Exemple :

Déterminer, si elle existe, la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{x^2-1}} \cdot \cos\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

La fonction $\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)$ n'admet pas de limite lorsque $x \to 1$, mais est bornée.

On s'intéresse donc à $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

Règles de calcul

Remarque : Tous les cas d'indéterminations et tous les théorèmes énoncés sur les limites à l'infini restent valables pour les limites en x_0 .

Exemple :

Déterminer, si elle existe, la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{x^2-1}} \cdot \cos\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

La fonction $\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)$ n'admet pas de limite lorsque $x \to 1$, mais est bornée.

On s'intéresse donc à $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ qui est une forme indéterminée : $"\frac{0}{0}"$.

Exemple

On lève cette indétermination

Exemple

On lève cette indétermination en faisant apparaître le facteur $(x-1)$ qui se cache au numérateur et au dénominateur de cette expression :

Exemple

On lève cette indétermination en faisant apparaître le facteur $(x-1)$ qui se cache au numérateur et au dénominateur de cette expression :

$$\frac{x-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{x^2-(2-x)}{\sqrt[3]{x^2-1}\left[\,x+\sqrt{2-x}\,\right]}$$

Exemple

On lève cette indétermination en faisant apparaître le facteur $(x-1)$ qui se cache au numérateur et au dénominateur de cette expression :

$$\frac{x-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{x^2-(2-x)}{\sqrt[3]{x^2-1}\left[x+\sqrt{2-x}\right]} = \frac{(x-1)(x+2)}{\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[3]{x+1}\left[x+\sqrt{2-x}\right]}$$

Exemple

On lève cette indétermination en faisant apparaître le facteur $(x-1)$ qui se cache au numérateur et au dénominateur de cette expression :

$$\frac{x-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{x^2-(2-x)}{\sqrt[3]{x^2-1}\left[x+\sqrt{2-x}\right]} = \frac{(x-1)(x+2)}{\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[3]{x+1}\left[x+\sqrt{2-x}\right]}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}\;(x+2)}{\sqrt[3]{x+1}\left[x+\sqrt{2-x}\right]}$$

Exemple

On lève cette indétermination en faisant apparaître le facteur $(x-1)$ qui se cache au numérateur et au dénominateur de cette expression :

$$\frac{x-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{x^2-(2-x)}{\sqrt[3]{x^2-1}\left[x+\sqrt{2-x}\right]} = \frac{(x-1)(x+2)}{\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x+1}\left[x+\sqrt{2-x}\right]}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}\,(x+2)}{\sqrt[3]{x+1}\left[x+\sqrt{2-x}\right]} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0\,.$$

Exemple

On lève cette indétermination en faisant apparaître le facteur $(x-1)$ qui se cache au numérateur et au dénominateur de cette expression :

$$\frac{x-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{x^2-(2-x)}{\sqrt[3]{x^2-1}\left[x+\sqrt{2-x}\right]} = \frac{(x-1)(x+2)}{\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[3]{x+1}\left[x+\sqrt{2-x}\right]}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}\,(x+2)}{\sqrt[3]{x+1}\left[x+\sqrt{2-x}\right]} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0\,.$$

On en déduit donc que $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{x^2-1}} \cdot \cos\left(\tfrac{1}{1-x}\right) = 0\,.$

Exemple

On lève cette indétermination en faisant apparaître le facteur $(x-1)$ qui se cache au numérateur et au dénominateur de cette expression :

$$\frac{x-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{x^2-(2-x)}{\sqrt[3]{x^2-1}\left[x+\sqrt{2-x}\right]} = \frac{(x-1)\,(x+2)}{\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[3]{x+1}\left[x+\sqrt{2-x}\right]}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}\,(x+2)}{\sqrt[3]{x+1}\left[x+\sqrt{2-x}\right]} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0\,.$$

On en déduit donc que $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{x^2-1}} \cdot \cos\left(\tfrac{1}{1-x}\right) = 0\,.$ ("$0 \times$ borné")

4. Infiniment Petits Equivalents (IPE)

Introduction

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x^2}$ est une forme indéterminée de type $"\frac{0}{0}"$.

Introduction

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} \quad \text{est une forme indéterminée de type } \text{''}\tfrac{0}{0}\text{''}.$$

Il est difficile de lever cette indétermination

Introduction

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x^2}$ est une forme indéterminée de type $"\frac{0}{0}"$.

Il est difficile de lever cette indétermination car les fonctions trigonométriques et polynomiales sont, pour le moment, difficilement comparables.

Introduction

$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$ est une forme indéterminée de type $"\frac{0}{0}"$.

Il est difficile de lever cette indétermination car les fonctions trigonométriques et polynomiales sont, pour le moment, difficilement comparables.

Pour surmonter cette difficulté, nous allons introduire la notion de fonctions infiniment petites équivalentes

Introduction

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} \quad \text{est une forme indéterminée de type } \text{"}\frac{0}{0}\text{"}.$$

Il est difficile de lever cette indétermination car les fonctions trigonométriques et polynomiales sont, pour le moment, difficilement comparables.

Pour surmonter cette difficulté, nous allons introduire la notion de fonctions infiniment petites équivalentes (IPE).

Infiniment Petits Equivalents (IPE)

Définition :

Infiniment Petits Equivalents (IPE)

Définition :

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage épointé de $x_0 \in \mathbb{R}$.

Infiniment Petits Equivalents (IPE)

Définition :

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage épointé de $x_0 \in \mathbb{R}$.

f et g sont des infiniments petits équivalents

Infiniment Petits Equivalents (IPE)

Définition :

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage épointé de $x_0 \in \mathbb{R}$.

f et g sont des infiniments petits équivalents (IPE)

Infiniment Petits Equivalents (IPE)

Définition :

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage épointé de $x_0 \in \mathbb{R}$.

f et g sont des infiniments petits équivalents (IPE) au voisinage de x_0

Infiniment Petits Equivalents (IPE)

Définition :

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage épointé de $x_0 \in \mathbb{R}$.

f et g sont des infiniments petits équivalents (IPE) au voisinage de x_0 si

$*$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

Infiniment Petits Equivalents (IPE)

Définition :

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage épointé de $x_0 \in \mathbb{R}$.

f et g sont des infiniments petits équivalents (IPE) au voisinage de x_0 si

$*$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ (elles sont infiniment petites (IP))

Infiniment Petits Equivalents (IPE)

Définition :

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage épointé de $x_0 \in \mathbb{R}$.

f et g sont des infiniments petits équivalents (IPE) au voisinage de x_0 si

$*$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ (elles sont infiniment petites (IP))

$*$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Infiniment Petits Equivalents (IPE)

Définition :

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage épointé de $x_0 \in \mathbb{R}$.

f et g sont des infiniments petits équivalents (IPE) au voisinage de x_0 si

$*$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ (elles sont infiniment petites (IP))

$*$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ (de façon équivalentes (E)).

Infiniment Petits Equivalents (IPE)

Définition :

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage épointé de $x_0 \in \mathbb{R}$.

f et g sont des infiniments petits équivalents (IPE) au voisinage de x_0 si

$*$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ (elles sont infiniment petites (IP))

$*$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ (de façon équivalentes (E)).

On écrit alors $f \sim g$ au voisinage de x_0.

Exemple

Exemple :

Exemple

Exemple : Montrons que $\sin(x) \sim x$ au voisinage de $x = 0$.

Exemple

Exemple : Montrons que $\sin(x) \sim x$ au voisinage de $x = 0$.

Ces deux fonctions sont infiniment petites au voisinage de $x = 0$:

Exemple

Exemple : Montrons que $\sin(x) \sim x$ au voisinage de $x = 0$.

Ces deux fonctions sont infiniment petites au voisinage de $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \sin(x) = \lim_{x \to 0} x = 0 .$$

Exemple

Exemple : Montrons que $\sin(x) \sim x$ au voisinage de $x = 0$.

Ces deux fonctions sont infiniment petites au voisinage de $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \sin(x) = \lim_{x \to 0} x = 0\,.$$

Montrons encore qu'elles sont équivalentes :

Exemple

Exemple : Montrons que $\sin(x) \sim x$ au voisinage de $x = 0$.

Ces deux fonctions sont infiniment petites au voisinage de $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \sin(x) = \lim_{x \to 0} x = 0\,.$$

Montrons encore qu'elles sont équivalentes : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,.$

Exemple

Exemple : Montrons que $\sin(x) \sim x$ au voisinage de $x = 0$.

Ces deux fonctions sont infiniments petites au voisinage de $x = 0$:

$\lim\limits_{x \to 0} \sin(x) = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$.

Montrons encore qu'elles sont équivalentes : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

La fonction $\dfrac{\sin(x)}{x}$ est paire,

Exemple

Exemple : Montrons que $\sin(x) \sim x$ au voisinage de $x = 0$.

Ces deux fonctions sont infiniment petites au voisinage de $x = 0$:

$\lim\limits_{x \to 0} \sin(x) = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$.

Montrons encore qu'elles sont équivalentes : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

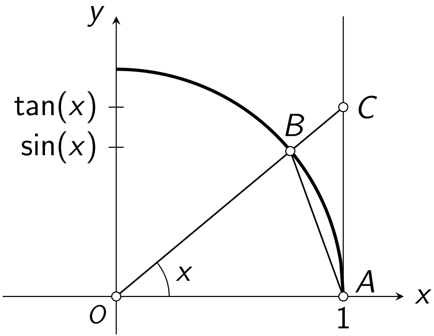
La fonction $\dfrac{\sin(x)}{x}$ est paire, il suffit donc de vérifier que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

Exemple

Soit $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Exemple

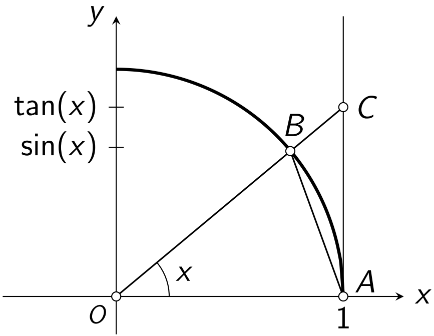
Soit $0 < x < \frac{\pi}{2}$.



Exemple

Soit $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

On compare l'aire des trois domaines suivants :

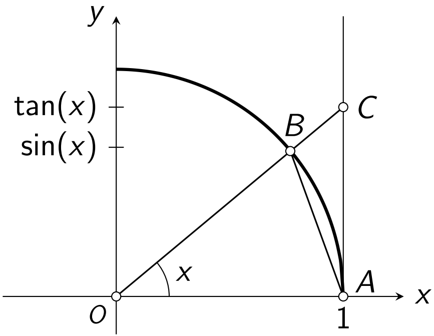


Exemple

Soit $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

On compare l'aire des trois domaines suivants :

* le domaine triangulaire OAB,

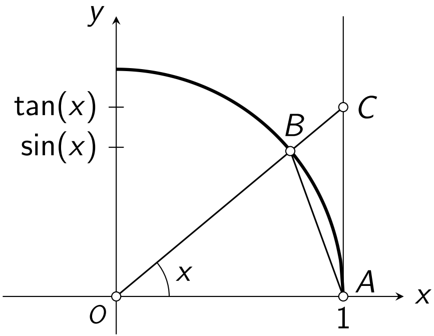


Exemple

Soit $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

On compare l'aire des trois domaines suivants :

- $*$ le domaine triangulaire OAB ,
- $*$ celui du secteur circulaire OAB ,

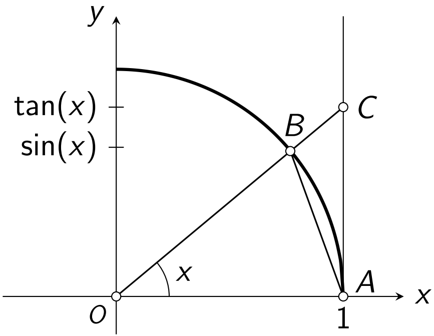


Exemple

Soit $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

On compare l'aire des trois domaines suivants :

- le domaine triangulaire OAB ,
- celui du secteur circulaire OAB ,
- et celui du triangle OAC .

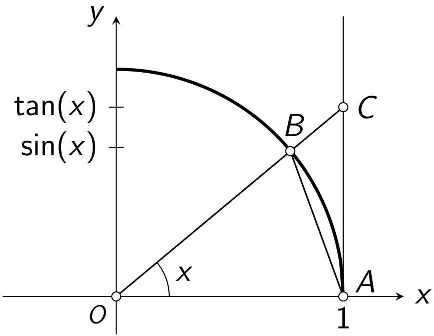


Exemple

Soit $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

On compare l'aire des trois domaines suivants :

* le domaine triangulaire OAB,
* celui du secteur circulaire OAB,
* et celui du triangle OAC.



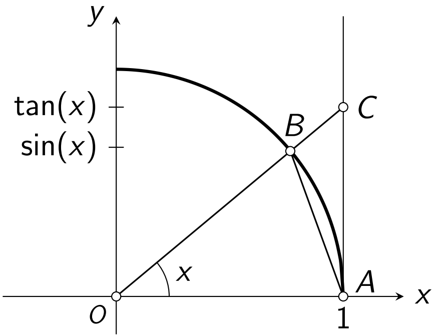
aire $(\triangle OAB)$.

Exemple

Soit $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

On compare l'aire des trois domaines suivants :

* le domaine triangulaire OAB ,
* celui du secteur circulaire OAB ,
* et celui du triangle OAC .



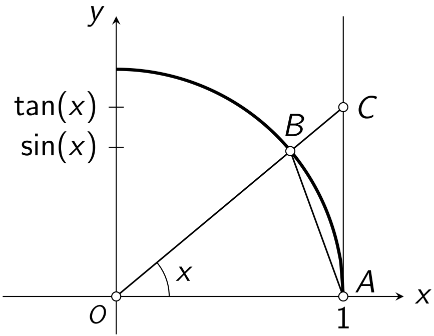
$$\text{aire } (\triangle OAB) \ \leq \ \text{aire } (\widehat{OAB}) \qquad\qquad .$$

Exemple

Soit $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

On compare l'aire des trois domaines suivants :

* le domaine triangulaire OAB ,
* celui du secteur circulaire OAB ,
* et celui du triangle OAC .



$$\text{aire}\,(\triangle OAB) \;\leq\; \text{aire}\,(\widehat{OAB}) \;\leq\; \text{aire}\,(\triangle OAC)\,.$$

Exemple

$$\text{aire}\,(\triangle OAB) \;\leq\; \text{aire}\,(\widehat{OAB}) \;\leq\; \text{aire}\,(\triangle OAC)$$

Exemple

$$\text{aire}\,(\triangle OAB) \;\leq\; \text{aire}\,(\widehat{OAB}) \;\leq\; \text{aire}\,(\triangle OAC)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\,[\,1 \cdot \sin(x)\,]$$

Exemple

$$\text{aire}\,(\triangle OAB) \;\leq\; \text{aire}\,(\widehat{OAB}) \;\leq\; \text{aire}\,(\triangle OAC)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left[1 \cdot \sin(x)\right] \;\leq\; \frac{1}{2}\left[x \cdot 1^2\right]$$

Exemple

$$\text{aire}\,(\triangle OAB) \;\leq\; \text{aire}\,(\widehat{OAB}) \;\leq\; \text{aire}\,(\triangle OAC)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left[1 \cdot \sin(x)\right] \;\leq\; \frac{1}{2}\left[x \cdot 1^2\right] \;\leq\; \frac{1}{2}\left[1 \cdot \tan(x)\right]$$

Exemple

$$
\begin{aligned}
& \text{aire}\,(\triangle OAB) \;\leq\; \text{aire}\,(\widehat{OAB}) \;\leq\; \text{aire}\,(\triangle OAC) \\
\Leftrightarrow\;\; & \frac{1}{2}\,[\,1\cdot\sin(x)\,] \;\leq\; \frac{1}{2}\,[\,x\cdot 1^2\,] \;\leq\; \frac{1}{2}\,[\,1\cdot\tan(x)\,] \\
\Leftrightarrow\;\; & \sin(x) \;\leq\; x \;\leq\; \tan(x)
\end{aligned}
$$

Exemple

$$\text{aire}\,(\triangle OAB) \;\leq\; \text{aire}\,(\widehat{OAB}) \;\leq\; \text{aire}\,(\triangle OAC)$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\,[\,1\cdot\sin(x)\,] \;\leq\; \frac{1}{2}\,[\,x\cdot 1^2\,] \;\leq\; \frac{1}{2}\,[\,1\cdot\tan(x)\,]$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin(x) \;\leq\; x \;\leq\; \tan(x) \quad\Leftrightarrow\quad 1 \;\leq\; \frac{x}{\sin(x)} \;\leq\; \frac{1}{\cos(x)}$$

Exemple

$$
\begin{aligned}
& \text{aire}\,(\triangle OAB) \;\leq\; \text{aire}\,(\widehat{OAB}) \;\leq\; \text{aire}\,(\triangle OAC) \\
\Leftrightarrow\;\; & \frac{1}{2}\,[\,1 \cdot \sin(x)\,] \;\leq\; \frac{1}{2}\,[\,x \cdot 1^2\,] \;\leq\; \frac{1}{2}\,[\,1 \cdot \tan(x)\,] \\
\Leftrightarrow\;\; & \sin(x) \;\leq\; x \;\leq\; \tan(x) \;\;\Leftrightarrow\;\; 1 \;\leq\; \frac{x}{\sin(x)} \;\leq\; \frac{1}{\cos(x)} \\
\Leftrightarrow\;\; & \cos(x) \;\leq\; \frac{\sin(x)}{x} \;\leq\; 1\,,
\end{aligned}
$$

Exemple

$$
\begin{aligned}
& \text{aire}\,(\triangle OAB) \;\le\; \text{aire}\,(\widehat{OAB}) \;\le\; \text{aire}\,(\triangle OAC) \\
\Leftrightarrow\;\; & \frac{1}{2}\,[1\cdot\sin(x)] \;\le\; \frac{1}{2}\,[x\cdot 1^2] \;\le\; \frac{1}{2}\,[1\cdot\tan(x)] \\
\Leftrightarrow\;\; & \sin(x) \;\le\; x \;\le\; \tan(x) \quad\Leftrightarrow\quad 1 \;\le\; \frac{x}{\sin(x)} \;\le\; \frac{1}{\cos(x)} \\
\Leftrightarrow\;\; & \cos(x) \;\le\; \frac{\sin(x)}{x} \;\le\; 1\,, \quad \text{car} \quad x\,,\ \sin(x)\,,\ \cos(x) > 0\,.
\end{aligned}
$$

Exemple

$$\text{aire}\,(\triangle OAB) \;\leq\; \text{aire}\,(\widehat{OAB}) \;\leq\; \text{aire}\,(\triangle OAC)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\,[1\cdot\sin(x)] \;\leq\; \frac{1}{2}\,[x\cdot 1^2] \;\leq\; \frac{1}{2}\,[1\cdot\tan(x)]$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(x) \;\leq\; x \;\leq\; \tan(x) \quad \Leftrightarrow \quad 1 \;\leq\; \frac{x}{\sin(x)} \;\leq\; \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(x) \;\leq\; \frac{\sin(x)}{x} \;\leq\; 1\,, \qquad \text{car} \quad x\,,\ \sin(x)\,,\ \cos(x) > 0\,.$$

Or $\quad \lim_{x\to 0^+} \cos(x) = 1\,,$

Exemple

$$\text{aire}\ (\triangle OAB) \ \leq\ \text{aire}\ (\widehat{OAB}) \ \leq\ \text{aire}\ (\triangle OAC)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\,[\,1\cdot\sin(x)\,] \ \leq\ \frac{1}{2}\,[\,x\cdot 1^2\,] \ \leq\ \frac{1}{2}\,[\,1\cdot\tan(x)\,]$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(x) \ \leq\ x \ \leq\ \tan(x) \quad \Leftrightarrow \quad 1 \ \leq\ \frac{x}{\sin(x)} \ \leq\ \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(x) \ \leq\ \frac{\sin(x)}{x} \ \leq\ 1\,, \qquad \text{car} \quad x\,,\ \sin(x)\,,\ \cos(x) > 0\,.$$

$$\text{Or} \quad \lim_{x\to 0^+} \cos(x) = 1\,, \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Exemple

$$\text{aire}\,(\triangle OAB) \;\leq\; \text{aire}\,(\widehat{OAB}) \;\leq\; \text{aire}\,(\triangle OAC)$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\,[\,1\cdot\sin(x)\,] \;\leq\; \frac{1}{2}\,[\,x\cdot 1^2\,] \;\leq\; \frac{1}{2}\,[\,1\cdot\tan(x)\,]$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin(x) \;\leq\; x \;\leq\; \tan(x) \quad\Leftrightarrow\quad 1 \;\leq\; \frac{x}{\sin(x)} \;\leq\; \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\Leftrightarrow\quad \cos(x) \;\leq\; \frac{\sin(x)}{x} \;\leq\; 1\,, \qquad \text{car} \quad x\,,\ \sin(x)\,,\ \cos(x) > 0\,.$$

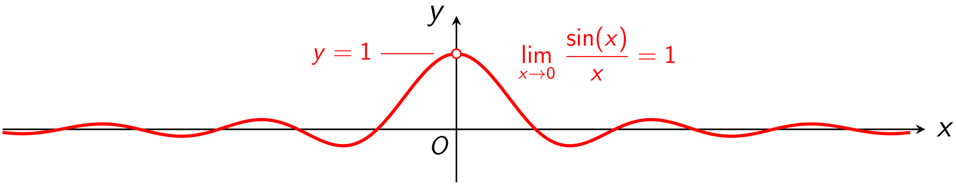
$$\text{Or} \quad \lim_{x\to 0^+} \cos(x) = 1\,, \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,.$$

Exemple

Illustration de cette limite :

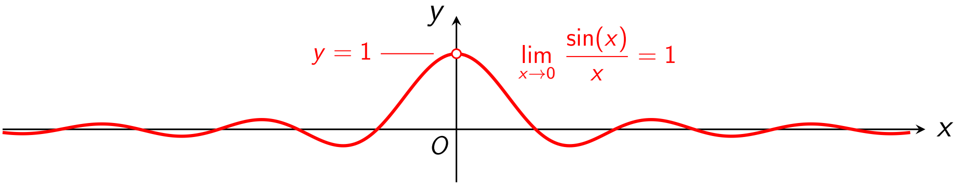
Exemple

Illustration de cette limite :



Exemple

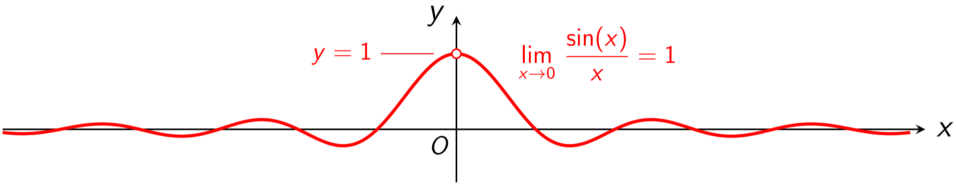
Illustration de cette limite :



On remarque ici l'importance de la notion de voisinage épointé :

Exemple

Illustration de cette limite :

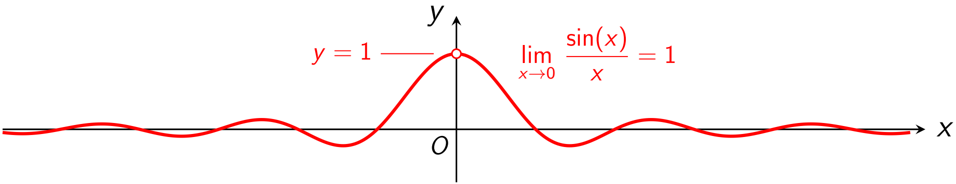


On remarque ici l'importance de la notion de voisinage épointé :

la fonction $\frac{\sin(x)}{x}$ n'est pas définie en $x = 0$,

Exemple

Illustration de cette limite :



On remarque ici l'importance de la notion de voisinage épointé :

la fonction $\frac{\sin(x)}{x}$ n'est pas définie en $x = 0$, mais sa limite existe.

Exemple

En conclusion :

Exemple

En conclusion :

$\sin(x)$ et x sont des infiniment petits équivalents

Exemple

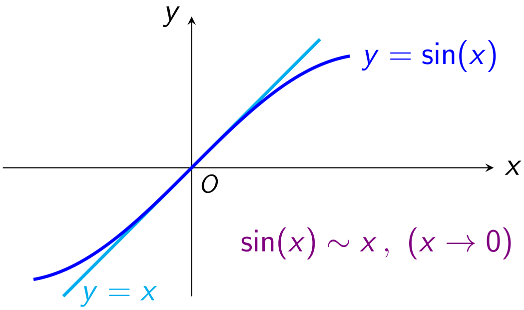
En conclusion :

$\sin(x)$ et x sont des infiniment petits équivalents au voisinage de $x = 0$.

Exemple

En conclusion :

$\sin(x)$ et x sont des infiniment petits équivalents au voisinage de $x = 0$.



IPE - produit

Théorème :

IPE - produit

Théorème :

Soient f_1 , f_2 , g_1 , g_2 quatre fonctions définies sur un voisinage épointé de x_0 .

IPE - produit

Théorème :

Soient f_1 , f_2 , g_1 , g_2 quatre fonctions définies sur un voisinage épointé de x_0 .

Si $f_1 \sim g_1$

IPE - produit

Théorème :

Soient f_1 , f_2 , g_1 , g_2 quatre fonctions définies sur un voisinage épointé de x_0 .

Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$

IPE - produit

Théorème :

Soient f_1 , f_2 , g_1 , g_2 quatre fonctions définies sur un voisinage épointé de x_0 .

Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0 ,

IPE - produit

Théorème :

Soient f_1, f_2, g_1, g_2 quatre fonctions définies sur un voisinage épointé de x_0.

Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0, alors $f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$ au voisinage de x_0.

IPE - produit

Théorème :

Soient f_1 , f_2 , g_1 , g_2 quatre fonctions définies sur un voisinage épointé de x_0 .

Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0 , alors $f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$ au voisinage de x_0 .

Démonstration :

IPE - produit

Théorème :

Soient f_1 , f_2 , g_1 , g_2 quatre fonctions définies sur un voisinage épointé de x_0 .

Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0 , alors $f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$ au voisinage de x_0 .

Démonstration : $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)$

IPE - produit

Théorème :

Soient f_1 , f_2 , g_1 , g_2 quatre fonctions définies sur un voisinage épointé de x_0 .

Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0 , alors $f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$ au voisinage de x_0 .

Démonstration : $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$

IPE - produit

Théorème :

Soient f_1 , f_2 , g_1 , g_2 quatre fonctions définies sur un voisinage épointé de x_0 .

Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0 , alors $f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$ au voisinage de x_0 .

Démonstration : $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g_1(x)$

IPE - produit

Théorème :

Soient f_1 , f_2 , g_1 , g_2 quatre fonctions définies sur un voisinage épointé de x_0 .

Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0 , alors $f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$ au voisinage de x_0 .

Démonstration : $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g_1(x)$

IPE - produit

Théorème :

Soient f_1, f_2, g_1, g_2 quatre fonctions définies sur un voisinage épointé de x_0.

Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0, alors $f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$ au voisinage de x_0.

Démonstration : $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) = 0$

IPE - produit

Théorème :

Soient f_1 , f_2 , g_1 , g_2 quatre fonctions définies sur un voisinage épointé de x_0 .

Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0 , alors $f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$ au voisinage de x_0 .

Démonstration : $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$

IPE - produit

Théorème :

Soient f_1 , f_2 , g_1 , g_2 quatre fonctions définies sur un voisinage épointé de x_0 .

Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0 , alors $f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$ au voisinage de x_0 .

Démonstration : $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) \cdot g_2(x) = 0$.

IPE - produit

Théorème :

Soient f_1 , f_2 , g_1 , g_2 quatre fonctions définies sur un voisinage épointé de x_0 .

Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0 , alors $f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$ au voisinage de x_0 .

Démonstration : $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) \cdot g_2(x) = 0$.

De plus $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$

IPE - produit

Théorème :

Soient f_1 , f_2 , g_1 , g_2 quatre fonctions définies sur un voisinage épointé de x_0 .

Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0 , alors $f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$ au voisinage de x_0 .

Démonstration : $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) \cdot g_2(x) = 0$.

De plus $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} = 1$

IPE - produit

Théorème :

Soient f_1 , f_2 , g_1 , g_2 quatre fonctions définies sur un voisinage épointé de x_0 .

Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0 , alors $f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$ au voisinage de x_0 .

Démonstration : $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) \cdot g_2(x) = 0$.

De plus $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} = 1 = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}$

IPE - produit

Théorème :

Soient f_1 , f_2 , g_1 , g_2 quatre fonctions définies sur un voisinage épointé de x_0 .

Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0 , alors $f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$ au voisinage de x_0 .

Démonstration : $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) \cdot g_2(x) = 0$.

De plus $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} = 1 = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x) \cdot f_2(x)}{g_1(x) \cdot g_2(x)}$

IPE - produit

Théorème :

Soient f_1 , f_2 , g_1 , g_2 quatre fonctions définies sur un voisinage épointé de x_0 .

Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0 , alors $f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$ au voisinage de x_0 .

Démonstration : $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) \cdot g_2(x) = 0$.

De plus $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} = 1 = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x) \cdot f_2(x)}{g_1(x) \cdot g_2(x)} = 1$. $\square$

IPE - somme

Attention !

IPE - somme

Attention ! En général,

IPE - somme

Attention ! En général, si $f_1 \sim g_1$

IPE - somme

Attention ! En général, si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$

IPE - somme

Attention ! En général, si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0 ,

IPE - somme

Attention ! En général, si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0, on a pas $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ au voisinage de x_0.

IPE - somme

Attention ! En général, si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0,
on a pas $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ au voisinage de x_0.

Contre-exemple :

IPE - somme

Attention ! En général, si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0,
on a pas $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ au voisinage de x_0.

Contre-exemple :

au voisinage de $x = 0$,

IPE - somme

Attention ! En général, si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0,
on a pas $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ au voisinage de x_0.

Contre-exemple :

au voisinage de $x = 0$, on a $x \sim (x + x^2)$

IPE - somme

Attention ! En général, si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0,
on a pas $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ au voisinage de x_0.

Contre-exemple :

au voisinage de $x = 0$, on a $x \sim (x + x^2)$ et $(-x) \sim (-x + x^2)$,

IPE - somme

Attention ! En général, si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0,
on a pas $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ au voisinage de x_0.

Contre-exemple :

au voisinage de $x = 0$, on a $x \sim (x + x^2)$ et $(-x) \sim (-x + x^2)$, car

IPE - somme

Attention ! En général, si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0,
on a pas $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ au voisinage de x_0.

Contre-exemple :

au voisinage de $x = 0$, on a $x \sim (x + x^2)$ et $(-x) \sim (-x + x^2)$, car

$* \lim_{x \to 0} x = \lim_{x \to 0} (x + x^2) = 0$

IPE - somme

Attention ! En général, si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0,

on a pas $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ au voisinage de x_0.

Contre-exemple :

au voisinage de $x = 0$, on a $x \sim (x + x^2)$ et $(-x) \sim (-x + x^2)$, car

$*$ $\lim\limits_{x \to 0} x = \lim\limits_{x \to 0} (x + x^2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x + x^2}$

IPE - somme

Attention ! En général, si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0,

on a pas $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ au voisinage de x_0.

Contre-exemple :

au voisinage de $x = 0$, on a $x \sim (x + x^2)$ et $(-x) \sim (-x + x^2)$, car

$* \lim\limits_{x \to 0} x = \lim\limits_{x \to 0} (x + x^2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + x}$

IPE - somme

Attention ! En général, si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0,
on a pas $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ au voisinage de x_0.

Contre-exemple :

au voisinage de $x = 0$, on a $x \sim (x + x^2)$ et $(-x) \sim (-x + x^2)$, car

$*$ $\lim\limits_{x \to 0} x = \lim\limits_{x \to 0} (x + x^2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + x} = 1$

IPE - somme

Attention ! En général, si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0,
on a pas $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ au voisinage de x_0.

Contre-exemple :

au voisinage de $x = 0$, on a $x \sim (x + x^2)$ et $(-x) \sim (-x + x^2)$, car

$*$ $\lim\limits_{x \to 0} x = \lim\limits_{x \to 0} (x + x^2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + x} = 1$

$*$ et $\lim\limits_{x \to 0} (-x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x + x^2) = 0$

IPE - somme

Attention ! En général, si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0,

on a pas $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ au voisinage de x_0.

Contre-exemple :

au voisinage de $x = 0$, on a $x \sim (x + x^2)$ et $(-x) \sim (-x + x^2)$, car

$*$ $\lim\limits_{x \to 0} x = \lim\limits_{x \to 0} (x + x^2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + x} = 1$

$*$ et $\lim\limits_{x \to 0} (-x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x + x^2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{-x + x^2}$

IPE - somme

Attention ! En général, si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0,

on a pas $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ au voisinage de x_0.

Contre-exemple :

au voisinage de $x = 0$, on a $x \sim (x + x^2)$ et $(-x) \sim (-x + x^2)$, car

* $\lim\limits_{x \to 0} x = \lim\limits_{x \to 0} (x + x^2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + x} = 1$

* et $\lim\limits_{x \to 0} (-x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x + x^2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{-x + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 - x}$

IPE - somme

Attention ! En général, si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0,
on a pas $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ au voisinage de x_0.

Contre-exemple :

au voisinage de $x = 0$, on a $x \sim (x + x^2)$ et $(-x) \sim (-x + x^2)$, car

$*$ $\lim\limits_{x \to 0} x = \lim\limits_{x \to 0} (x + x^2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + x} = 1$

$*$ et $\lim\limits_{x \to 0} (-x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x + x^2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{-x + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 - x} = 1$.

IPE - somme

Attention ! En général, si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0,

on a pas $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ au voisinage de x_0.

Contre-exemple :

au voisinage de $x = 0$, on a $x \sim (x + x^2)$ et $(-x) \sim (-x + x^2)$, car

* $\lim\limits_{x \to 0} x = \lim\limits_{x \to 0} (x + x^2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + x} = 1$

* et $\lim\limits_{x \to 0} (-x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x + x^2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{-x + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 - x} = 1$.

* Mais $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + (-x)}{(x + x^2) + (-x + x^2)}$

IPE - somme

Attention ! En général, si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0,

on a pas $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ au voisinage de x_0.

Contre-exemple :

au voisinage de $x = 0$, on a $x \sim (x + x^2)$ et $(-x) \sim (-x + x^2)$, car

$*$ $\lim\limits_{x \to 0} x = \lim\limits_{x \to 0} (x + x^2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + x} = 1$

$*$ et $\lim\limits_{x \to 0} (-x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x + x^2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{-x + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 - x} = 1$.

$*$ Mais $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + (-x)}{(x + x^2) + (-x + x^2)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{0}{2x^2}$

IPE - somme

Attention ! En général, si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0,

on a pas $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ au voisinage de x_0.

Contre-exemple :

au voisinage de $x = 0$, on a $x \sim (x + x^2)$ et $(-x) \sim (-x + x^2)$, car

$*$ $\lim\limits_{x \to 0} x = \lim\limits_{x \to 0} (x + x^2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + x} = 1$

$*$ et $\lim\limits_{x \to 0} (-x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x + x^2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{-x + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 - x} = 1$.

$*$ Mais $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + (-x)}{(x + x^2) + (-x + x^2)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{0}{2x^2} = 0$

IPE - somme

Attention ! En général, si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0,
on a pas $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ au voisinage de x_0.

Contre-exemple :

au voisinage de $x = 0$, on a $x \sim (x + x^2)$ et $(-x) \sim (-x + x^2)$, car

$*$ $\lim\limits_{x \to 0} x = \lim\limits_{x \to 0} (x + x^2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + x} = 1$

$*$ et $\lim\limits_{x \to 0} (-x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x + x^2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{-x + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 - x} = 1$.

$*$ Mais $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + (-x)}{(x + x^2) + (-x + x^2)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{0}{2x^2} = 0 \neq 1$.

Règle d'utiliation des IPE

Du comportement des IPE dans un produit et dans une somme, on déduit

Règle d'utiliation des IPE

Du comportement des IPE dans un produit et dans une somme, on déduit

La règle d'utilisation des IPE :

Règle d'utiliation des IPE

Du comportement des IPE dans un produit et dans une somme, on déduit

La règle d'utilisation des IPE :

Dans un calcul de limite,

Règle d'utiliation des IPE

Du comportement des IPE dans un produit et dans une somme, on déduit

La règle d'utilisation des IPE :

Dans un calcul de limite, on peut remplacer une fonction par son IPE,

Règle d'utiliation des IPE

Du comportement des IPE dans un produit et dans une somme, on déduit

La règle d'utilisation des IPE :

Dans un calcul de limite, on peut remplacer une fonction par son IPE, uniquement dans une expression factorisée

Règle d'utiliation des IPE

Du comportement des IPE dans un produit et dans une somme, on déduit

La règle d'utilisation des IPE :

Dans un calcul de limite, on peut remplacer une fonction par son IPE, uniquement dans une expression factorisée et jamais dans une somme.

Règle d'utiliation des IPE

Du comportement des IPE dans un produit et dans une somme, on déduit

La règle d'utilisation des IPE :

Dans un calcul de limite, on peut remplacer une fonction par son IPE, uniquement dans une expression factorisée et jamais dans une somme.

Par exemple :

Règle d'utiliation des IPE

Du comportement des IPE dans un produit et dans une somme, on déduit

La règle d'utilisation des IPE :

Dans un calcul de limite, on peut remplacer une fonction par son IPE, uniquement dans une expression factorisée et jamais dans une somme.

Par exemple : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^3}$

Règle d'utiliation des IPE

Du comportement des IPE dans un produit et dans une somme, on déduit

La règle d'utilisation des IPE :

Dans un calcul de limite, on peut remplacer une fonction par son IPE, uniquement dans une expression factorisée et jamais dans une somme.

Par exemple : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^3} \neq \lim_{x \to 0} \frac{2x - 2x}{x^3}$

Règle d'utiliation des IPE

Du comportement des IPE dans un produit et dans une somme, on déduit

La règle d'utilisation des IPE :

Dans un calcul de limite, on peut remplacer une fonction par son IPE, uniquement dans une expression factorisée et jamais dans une somme.

Par exemple : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^3} \neq \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - 2x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{0}{x^3}$

Règle d'utiliation des IPE

Du comportement des IPE dans un produit et dans une somme, on déduit

La règle d'utilisation des IPE :

Dans un calcul de limite, on peut remplacer une fonction par son IPE, uniquement dans une expression factorisée et jamais dans une somme.

Par exemple : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^3} \neq \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - 2x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x^3} = 0\,.$

Règle d'utiliation des IPE

Du comportement des IPE dans un produit et dans une somme, on déduit

La règle d'utilisation des IPE :

Dans un calcul de limite, on peut remplacer une fonction par son IPE, uniquement dans une expression factorisée et jamais dans une somme.

Par exemple : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^3} \neq \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - 2x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x^3} = 0\,.$

Nous verrons tout à l'heure comment calculer cette limite.

Exemples

Voici deux autres couples d'IPE au voisinage de $x = 0$:

Exemples

Voici deux autres couples d'IPE au voisinage de $x = 0$:

- $\lim_{x \to 0} [\, 1 - \cos(x) \,] = 0$

Exemples

Voici deux autres couples d'IPE au voisinage de $x = 0$:

- $\lim\limits_{x \to 0} \left[1 - \cos(x) \right] = 0$ et

  $1 - \cos(x) = 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)$

Exemples

Voici deux autres couples d'IPE au voisinage de $x = 0$:

- $\lim\limits_{x \to 0} [\,1 - \cos(x)\,] = 0$ et

  $1 - \cos(x) = 2\,\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2.$

Exemples

Voici deux autres couples d'IPE au voisinage de $x = 0$:

- $\lim_{x \to 0} [1 - \cos(x)] = 0$ et

  $$1 - \cos(x) = 2 \sin^2\left(\tfrac{x}{2}\right) \sim 2\left(\tfrac{x}{2}\right)^2.$$

  Donc $1 - \cos(x) \sim \dfrac{x^2}{2}, \quad (x \to 0)$.

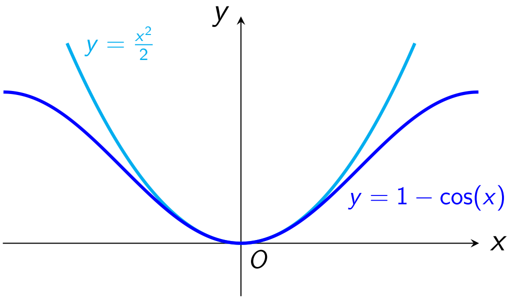
Exemples

Voici deux autres couples d'IPE au voisinage de $x = 0$:

- $\lim\limits_{x \to 0} [\, 1 - \cos(x) \,] = 0$ et

  $1 - \cos(x) = 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right) \sim 2 \left(\frac{x}{2}\right)^2.$

  Donc $1 - \cos(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$, $(x \to 0)$.



Exemples

- $\lim_{x \to 0} \tan(x) = 0$

Exemples

- $\lim_{x \to 0} \tan(x) = 0$ et

  $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x}$

Exemples

- $\lim_{x \to 0} \tan(x) = 0$ et

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)}$$

Exemples

- $\lim_{x \to 0} \tan(x) = 0$ et

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(x)}$$

Exemples

- $\lim_{x \to 0} \tan(x) = 0$ et

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1\,.$$

Exemples

- $\lim_{x \to 0} \tan(x) = 0 \quad$ et

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1\,.$$

Donc $\quad \tan(x) \sim x\,, \quad (x \to 0)\,.$

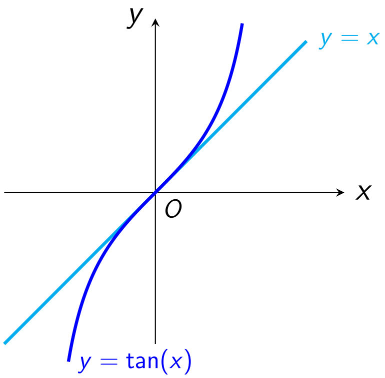
Exemples

- $\lim\limits_{x\to 0} \tan(x) = 0 \quad$ et

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1\,.$$

Donc $\quad \tan(x) \sim x\,, \quad (x \to 0)\,.$



Exemples

Nous avons donc mis en évidence trois couples d'IPE :

Exemples

Nous avons donc mis en évidence trois couples d'IPE :

- $\sin(x) \sim x$, au voisinage de $x = 0$,

Exemples

Nous avons donc mis en évidence trois couples d'IPE :

- $\sin(x) \sim x\,,$ au voisinage de $x = 0\,,$
- $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}\,,$ au voisinage de $x = 0\,,$

Exemples

Nous avons donc mis en évidence trois couples d'IPE :

- $\sin(x) \sim x\,,$ au voisinage de $x = 0\,,$
- $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}\,,$ au voisinage de $x = 0\,,$
- $\tan(x) \sim x\,,$ au voisinage de $x = 0\,,$

Exemples

Nous avons donc mis en évidence trois couples d'IPE :

- $\sin(x) \sim x\,,\;$ au voisinage de $\;x = 0\,,$
- $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}\,,\;$ au voisinage de $\;x = 0\,,$
- $\tan(x) \sim x\,,\;$ au voisinage de $\;x = 0\,,$

qui nous rendrons service dans les calculs de limite,

Exemples

Nous avons donc mis en évidence trois couples d'IPE :

- $\sin(x) \sim x\,,\quad$ au voisinage de $\; x = 0\,,$
- $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}\,,\quad$ au voisinage de $\; x = 0\,,$
- $\tan(x) \sim x\,,\quad$ au voisinage de $\; x = 0\,,$

qui nous rendrons service dans les calculs de limite, à condition de respecter la règle d'utilisation des IPE.

Exemple servant d'avertissement

Exemple :

Exemple servant d'avertissement

Exemple : Comment calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^3}$?

Exemple servant d'avertissement

Exemple : Comment calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^3}$?

$\sin(2x) \sim 2x$

Exemple servant d'avertissement

Exemple : Comment calculer $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^3}$?

$\sin(2x) \sim 2x$ et $2\sin(x) \sim 2x$, lorsque $x \to 0$,

Exemple servant d'avertissement

Exemple : Comment calculer $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^3}$?

$\sin(2x) \sim 2x$ et $2\sin(x) \sim 2x$, lorsque $x \to 0$, mais on a vu qu'on ne peut pas remplacer les deux sinus par leur IPE dans ce numérateur non factorisé.

Exemple servant d'avertissement

Exemple : Comment calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^3}$?

$\sin(2x) \sim 2x$ et $2\sin(x) \sim 2x$, lorsque $x \to 0$, mais on a vu qu'on ne peut pas remplacer les deux sinus par leur IPE dans ce numérateur non factorisé.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^3}$$

Exemple servant d'avertissement

Exemple : Comment calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2\,\sin(x)}{x^3}$?

$\sin(2x) \sim 2x$ et $2\,\sin(x) \sim 2x$, lorsque $x \to 0$, mais on a vu qu'on ne peut pas remplacer les deux sinus par leur IPE dans ce numérateur non factorisé.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2\,\sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,\sin(x)\,\cos(x) - 2\,\sin(x)}{x^3}$$

Exemple servant d'avertissement

Exemple : Comment calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^3}$?

$\sin(2x) \sim 2x$ et $2\sin(x) \sim 2x$, lorsque $x \to 0$, mais on a vu qu'on ne peut pas remplacer les deux sinus par leur IPE dans ce numérateur non factorisé.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin(x)\cos(x) - 2\sin(x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2\sin(x)\,[\,1 - \cos(x)\,]}{x^3}$$

Exemple servant d'avertissement

Exemple : Comment calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2\,\sin(x)}{x^3}$?

$\sin(2x) \sim 2x$ et $2\,\sin(x) \sim 2x$, lorsque $x \to 0$, mais on a vu qu'on ne peut pas remplacer les deux sinus par leur IPE dans ce numérateur non factorisé.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2\,\sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,\sin(x)\,\cos(x) - 2\,\sin(x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\,\sin(x)\,[\,1 - \cos(x)\,]}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\,x\left[\,\frac{x^2}{2}\,\right]}{x^3}$$

Exemple servant d'avertissement

Exemple : Comment calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^3}$?

$\sin(2x) \sim 2x$ et $2\sin(x) \sim 2x$, lorsque $x \to 0$, mais on a vu qu'on ne peut pas remplacer les deux sinus par leur IPE dans ce numérateur non factorisé.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x)\cos(x) - 2\sin(x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(x)\,[\,1 - \cos(x)\,]}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\,x\left[\,\frac{x^2}{2}\,\right]}{x^3} = -1\,.$$

Remarque

Remarque :

Remarque

Remarque :

Cette notion de fonctions infiniment petites équivalentes en x_0

Remarque

Remarque :

Cette notion de fonctions infiniment petites équivalentes en x_0 est un cas particulier d'un concept plus général appelé Développement Limité (DL)

Remarque

Remarque :
Cette notion de fonctions infiniment petites équivalentes en x_0 est un cas particulier d'un concept plus général appelé Développement Limité (DL) qui permet, sous certaines conditions,

Remarque

Remarque :
Cette notion de fonctions infiniment petites équivalentes en x_0 est un cas particulier d'un concept plus général appelé Développement Limité (DL)
qui permet, sous certaines conditions, d'approximer une fonction donnée par une fonction polynomiale.

Remarque

Remarque :

Cette notion de fonctions infiniment petites équivalentes en x_0 est un cas particulier d'un concept plus général appelé Développement Limité (DL) qui permet, sous certaines conditions, d'approximer une fonction donnée par une fonction polynomiale.

Cette approximation est locale

Remarque

Remarque :
Cette notion de fonctions infiniment petites équivalentes en x_0 est un cas particulier d'un concept plus général appelé Développement Limité (DL)
qui permet, sous certaines conditions, d'approximer une fonction donnée par une fonction polynomiale.
Cette approximation est locale et sa précision varie avec le degré du polynôme.

Remarque

Remarque :

Cette notion de fonctions infiniment petites équivalentes en x_0 est un cas particulier d'un concept plus général appelé Développement Limité (DL) qui permet, sous certaines conditions, d'approximer une fonction donnée par une fonction polynomiale.

Cette approximation est locale et sa précision varie avec le degré du polynôme.

Nous étudierons cette notion durant le semestre de printemps.

Remarque

Remarque :

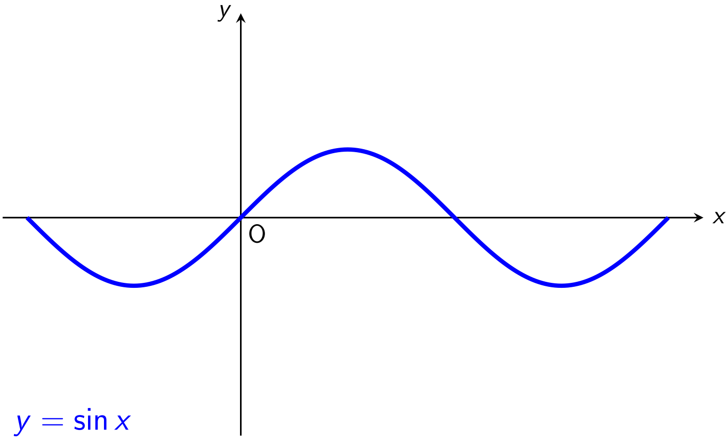
Cette notion de fonctions infiniment petites équivalentes en x_0 est un cas particulier d'un concept plus général appelé Développement Limité (DL) qui permet, sous certaines conditions, d'approximer une fonction donnée par une fonction polynomiale.

Cette approximation est locale et sa précision varie avec le degré du polynôme.

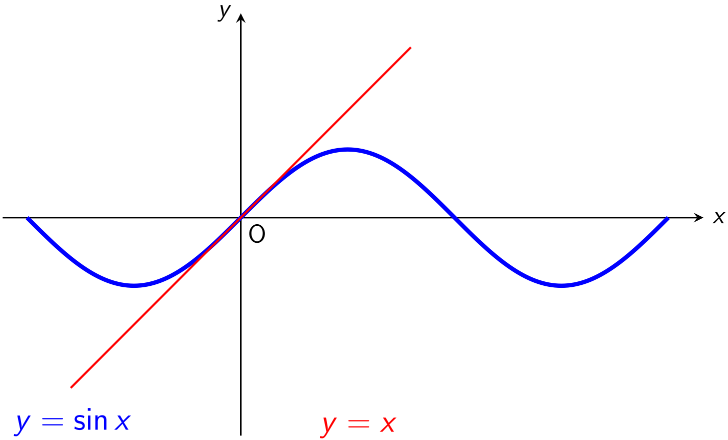
Nous étudierons cette notion durant le semestre de printemps.

Voici l'illustration du développement limité de la fonction sinus en $x = 0$:

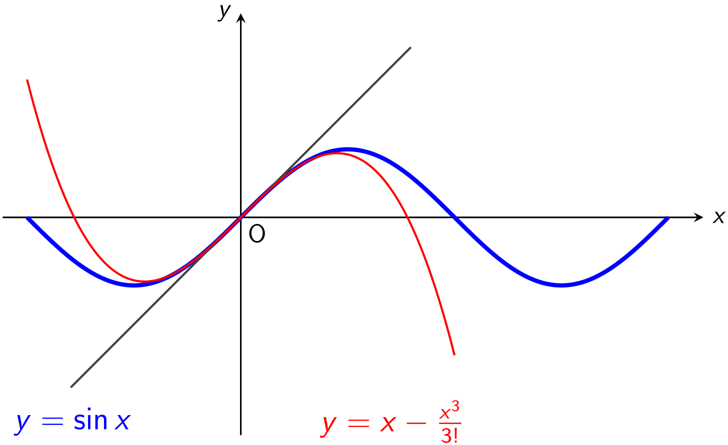
Exemple



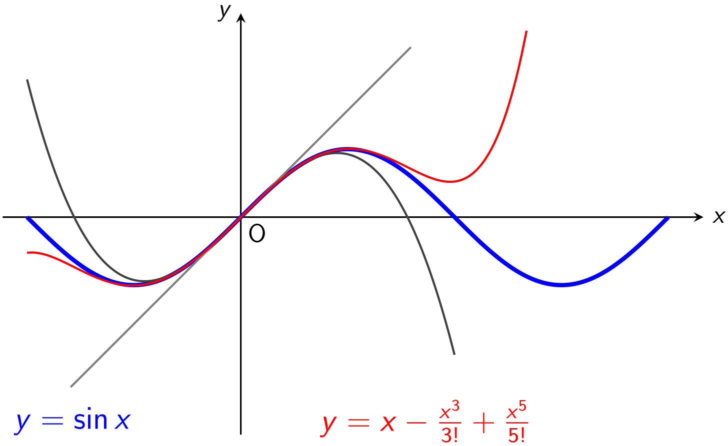
Exemple



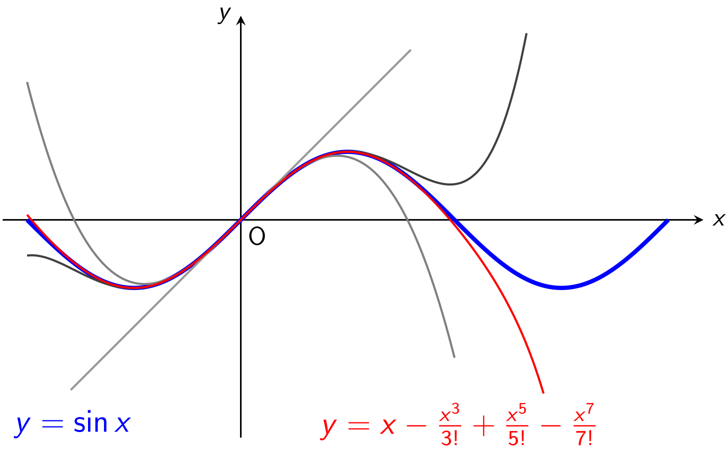
Exemple



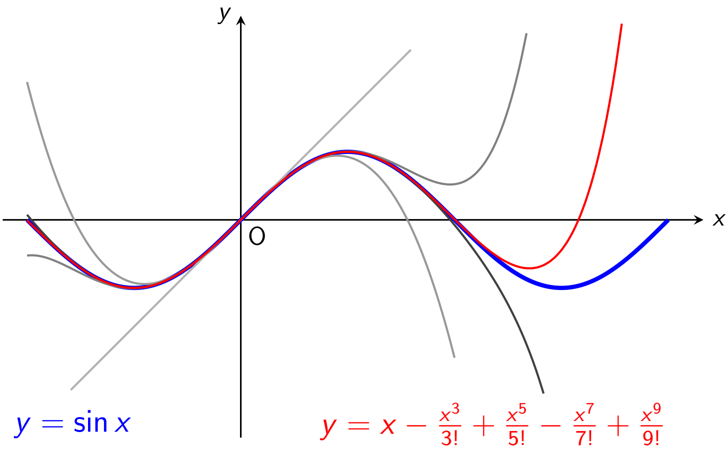
Exemple



Exemple



Exemple



Exemple