Continuité et dérivabilité des fonctions réciproques

Théorème. Soient $E, F \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une bijection continue. Si $I \subset E$ est un intervalle, alors f, restreinte à I, est strictement monotone.

Démonstration. Soient $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$. Comme f est bijective, on doit avoir $f(a) \neq f(b)$. En substituant f par $-f$ si nécessaire, on peut sans pertes de généralités, supposer que $f(b) > f(a)$. Montrons alors que que $f(c) > f(b)$.
Par absurde : supposons $f(c) < f(b)$. Comme f est continue, $f([a, b])$ et $f([b, c])$ sont des intervalles. Comme $f(a), f(c) < f(b)$ on aurait une intersection non vide des intervalles $[f(a), f(b)[$ et $[f(c), f(b)[$ En effet, on doit avoir $f(a) \in [f(c), f(b)[$ ou $f(c) \in [f(a), f(b)[$.
Soit alors $y \in [f(a), f(b)[\cap [f(c), f(b)[$. Il doit alors exister $x_1 \in [a, b[$, une pré-image de y par f , et $x_2 \in [b, c[$, une pré-image de y par f. Mais alors, $x_1 \neq x_2$ et $y = f(x_1) = f(x_2)$, contredisant la bijectivité de f.
On doit alors avoir $f(c) > f(b)$ et f est strictement monotone sur I. □

Théorème. Soient $I, J \subset \mathbb{R}$ des intervalles ouverts et $f : I \to J$ une bijection continue. Alors $f^{-1} : J \to I$ est elle-même continue.

Démonstration. Soit $(x, y) \in I \times J$ tel que $x = f^{-1}(y)$ et soit $\epsilon > 0$. Il faut alors trouver un $\delta > 0$, tel que $|y' - y| < \delta$ impliquent $|f^{-1}(y') - x| < \epsilon$.
Posons alors $K = I \cap]x - \epsilon, x + \epsilon[$. K est à nouveau un intervalle ouvert. Il existe alors $x_-, x_+ \in \mathbb{R}$, tels que $x \in]x_-, x_+[= K$.
Par le théorème précédent, f est strictement monotone et on peut sans perte de généralité supposer (en substituant f par $-f$ si nécessaire), que f est strictement croissante. Par continuité de f, on a alors $y_-, y_+ \in \mathbb{R}$, tels que $f(]x_-, x_+[) =]y_-, y_+[$ et $y_- < y = f(x) < y_+$. On pose

$$\delta := \min\{|y - y_-|, |y - y_+|\} > 0.$$

Si $|y' - y| < \delta$, on a alors que $y_- < y' < y_+$. Par bijectivité il existe alors un unique $x' \in I$ tel que $f(x) = y'$ et par monotonie de f, on doit avoir $x' \in]x_-, x_+[= K$. Cela implique que $|x' - x| < \epsilon$.
On conclut en notant que $x' = f^{-1}(x')$ et $x = f^{-1}(y)$. □

Théorème. Soient $E, F \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une bijection dérivable. Soit $I \subset E$ un intervalle ouvert, sur lequel $\frac{d}{dx}f$ ne s'annule pas. Alors $f^{-1} : F \to E$ est elle-même dérivable sur l'intervalle ouvert $J = f(I)$ et

$$\frac{d}{dx}(f^{-1})(y) = \frac{1}{(\frac{d}{dx}f)(f^{-1}(y))}.$$

Démonstration. Montrons que la limite épointée du rapport de Newton

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta \neq 0}} \frac{f^{-1}(y+\delta) - f^{-1}(y)}{\delta} = \frac{1}{(\frac{d}{dx}f)(f^{-1}(y))}$$

pour tout $y \in J$.
Notons que pour $\delta \neq 0$, $y + \delta \neq y$. Par bijectivité de f^{-1}, $f^{-1}(y+\delta) \neq f^{-1}(y)$. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{f^{-1}(y+\delta) - f^{-1}(y)}{\delta} &= \frac{f^{-1}(y+\delta) - f^{-1}(y)}{y+\delta-y} \\ = \frac{f^{-1}(y+\delta) - f^{-1}(y)}{f(f^{-1}(y+\delta)) - f(f^{-1}(y))} &= \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y+\delta)) - f(f^{-1}(y))}{f^{-1}(y+\delta) - f^{-1}(y)}}. \end{aligned}$$

Par le théorème précédent, la fonction f^{-1} est continue et ainsi, la limite épointée

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta \neq 0}} \left(f^{-1}(y+\delta) - f^{-1}(y)\right) = 0.$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant continue pour tout $x \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta \neq 0}} \frac{f^{-1}(y+\delta) - f^{-1}(y)}{\delta} &= \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta \neq 0}} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y+\delta)) - f(f^{-1}(y))}{f^{-1}(y+\delta) - f^{-1}(y)}} \\ = \frac{1}{\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta \neq 0}} \frac{f(f^{-1}(y+\delta)) - f(f^{-1}(y))}{f^{-1}(y+\delta) - f^{-1}(y)}} &= \frac{1}{(\frac{d}{dx}f)(f^{-1}(y))}. \end{aligned}$$

$\square$