EPFL

1

Enseignant·es: Bossoney, Dubuis, Khukhro
Analyse 1 - CMS
9 janvier 2024
Durée : 105 minutes

Robin des Bois

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 30 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Quelques formules de trigonométrie

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\,\tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Formules de transformation produit-somme :

$$\cos(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}[\,\cos(x+y) + \cos(x-y)\,]$$

$$\sin(x)\cdot\sin(y) = -\frac{1}{2}[\,\cos(x+y) - \cos(x-y)\,]$$

$$\sin(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}[\,\sin(x+y) + \sin(x-y)\,]$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Expressions des fonctions trigonométriques en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (3 points)
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Calculer l'approximation linéaire A de $(f \circ g)(x_0 + \Delta x)$ en $x_0 = 2$ pour $\Delta x = 0,1$.
Les valeurs suivantes sont données:

$$f(2) = 3 \quad f(5) = 7 \quad f'(2) = 13 \quad f'(5) = 19 \quad f'(17) = 29$$
$$g(2) = 5 \quad g(3) = 11 \quad g'(2) = 17 \quad g'(3) = 23 \quad g'(13) = 31$$

- [ ] $A = 9,9$
- [ ] $A = 7,1$
- [x] $A = 39,3$
- [ ] $A = 37,1$
- [ ] $A = 29,1$
- [ ] $A = 18,6$

Correction : On utilise la formule
$A = (f \circ g)'(x_0) \cdot \Delta x + (f \circ g)(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0) \cdot \Delta x + f(g(x_0))$.

Question 2 (3 points)
La limite

$$\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+2} + 4x)(4 - \sin(3x))$$

vaut

- [ ] $20.$
- [x] $-\infty.$
- [ ] $+\infty.$
- [ ] $12.$
- [ ] $0.$
- [ ] $-20.$

Correction : On a $\lim_{x \to -\infty}(\sqrt{x^2+2} + 4x) = -\infty$ *et* $4 - \sin(3x) \geq 3$ *pour tout* x. *La limite ci-dessus vaut donc* $-\infty$.

Question 3 (3 points)
Soit a un paramètre réel et soit la fonction

$$f(x) = \frac{2x^2 + ax + a + 10}{x^2 + 2x - 3}.$$

Pour quelle valeur du paramètre a la fonction est-elle prolongeable par continuité en $x = 1$?

- [x] $a = -6$
- [ ] $a = -3$
- [ ] $a = 2$
- [ ] Pour tout $a \in \mathbb{R}$
- [ ] $a = 1$
- [ ] Pour aucune valeur de a

Correction : La fonction est prolongeable par continuité en $x = 1$ *si la limite* $\lim_{x \to 1} f(x)$ *existe. Comme le dénominateur s'annule en* $x = 1$, *il faut que le numérateur s'annule en* $x = 1$ *aussi, c'est-à-dire,* $2 \cdot 1^2 + a \cdot 1 + a + 10 = 0$. *Ceci implique que* $a = -6$. *En effet, si* $a = -6$, *on a* $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2(x-2)}{x+3} = \frac{-1}{2}$.

Question 4 (3 points)
On considère la fonction f définie au voisinage de $x_0 = 0$ par $f(0) = 0$ et

$$f(x) = \frac{-2\sin^2(x) + \sin(x)\sin(2x) - (6\cos(x) - 6)\sin^2(x)}{\tan(x^2)} \qquad \text{pour } x \neq 0.$$

Parmi les fonctions ci-dessous, laquelle est un infiniment petit équivalent (IPE) de f au voisinage de $x_0 = 0$?

- ☐ $-4x^2$
- ☐ $-2x^2$
- ☐ $-3x^2$
- ■ $2x^2$
- ☐ $4x^2$
- ☐ $2x$
- ☐ $2x^3$
- ☐ $-2x$
- ☐ $3x^2$

Correction : On utilise la formule $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ *et on factorise le numérateur pour obtenir* $\frac{4\sin^2(x)(1-\cos(x))}{\tan(x^2)}$. *En appliquant les IPE* $\sin^2(x) \sim x^2$, $\tan(x^2) \sim x^2$ *et* $\cos(x) - 1 \sim \frac{x^2}{2}$, *on obtient* $2x^2$.

Question 5 (3 points)
On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2} & \text{si } x < 2, \\ 2 & \text{si } x = 2, \\ (x-2)^2 + \frac{5}{2} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Parmi les couples de valeurs pour ε et δ suivants, lequel vérifie

$$\forall x,\ |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(2)| < \varepsilon.$$

- ☐ $\varepsilon = 1/2,\ \delta = 1/4.$
- ☐ $\varepsilon = 1, \delta = 3/2.$
- ■ $\varepsilon = 1,\ \delta = 1/2.$
- ☐ $\varepsilon = 1/4,\ \delta = 1/2.$

Correction : On vérifie que la condition
$f\big(\,]2-\delta, 2+\delta[\,\big) =]\frac{3}{2} - \delta, \frac{3}{2}[\cup \{2\} \cup]\frac{5}{2}, \delta^2 + \frac{5}{2}[\subset]2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon[$
n'est vérifiée que pour le couple $\varepsilon = 1, \delta = 1/2$.

Vrai ou faux

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.

Question 6 (1 point)
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle $[0, 1]$. Si $f(0) < -3$ et si $f(1) > 4$, alors $\exists x_0 \in]0, 1[$ tel que $f(x_0) \in [-3, 4]$.

■ VRAI ☐ FAUX

Correction : On applique la valeur intermédiaire. La fonction doit prendre toutes les valeurs compris entre $f(0)$ et $f(1)$, donc en tout cas toutes les valeurs entre -3 et 4.

Question 7 (1 point)
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $+\infty$ et deux suites $(x_n), (y_n)$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty.$$

S'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = l$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.

☐ VRAI ■ FAUX

Correction : Prendre $f(x) = \sin(x), x_n = n\pi, y_n = 2n\pi$.

Question 8 (1 point)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $+\infty$. Si f ne tend pas vers 0 quand $x \to +\infty$, alors il n'existe aucune suite (x_n) telle que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0.$$

☐ VRAI ■ FAUX

Correction : Prendre $f(x) = \sin(x), x_n = n\pi$.

Question 9 (1 point)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en x_0 mais non dérivable en x_0. La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = (x - x_0)f(x)$ est dérivable en x_0.

■ VRAI ☐ FAUX

Correction : On calcule le rapport de Newton $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)f(x)}{x-x_0} = f(x)$. On a donc $g'(x_0) = f(x_0)$.

Question 10 (1 point)
Soient $a < b$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que la fonction dérivée f' est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$. On suppose de plus que f' est dérivable sur $]a, b[$. Alors $\exists x_0 \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} = f''(x_0).$$

■ VRAI ☐ FAUX

Correction : On applique le théorème de accroissements finis à f'.

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 11: *Cette question est notée sur 5 points.*

.5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5

On se donne le point $P(2,1)$ et les paraboles

$$f_1(x) = x^2 + 2x - 7, \quad f_2(x) = -2x^2 + x - 1$$

(a) Déterminer l'équation de la tangente t_1 au graphe de f_1 au point P.

(b) Déterminer les équations de toutes les tangentes au graphe de f_2 passant par P.

(c) Calculer l'angle géométrique formé en P par chacune des tangentes trouvées en (b) avec la droite t_1 trouvée en (a).

Solution

(a) La tangente t_1 au graphe de f_1 en P s'écrit

$$t_1 y = x_0^2 + 2x_0 - 7 + (2x_0 + 2)(x - x_0), \quad \text{avec } x_0 = 2.$$

On trouve alors

$$t_1 : y = 6x - 11.$$

(b) Les tangentes au graphes de f_2 s'écrivent

$$t_2 : y = -2x_0^2 + x_0 - 1 + (1 - 4x_0)(x - x_0),$$

où x_0 sont les points de tangences.
Comme ces tangentes sont issues du point $P(2,1)$, on doit avoir

$$\begin{aligned} 1 &= -2x_0^2 + y_0 - 1 + (1 - 4x_0)(2 - x_0) \\ &\Leftrightarrow 0 = 2x_0^2 - 8x_0 \\ &\Leftrightarrow x_0 \in \{0, 4\}. \end{aligned}$$

Les deux tangentes s'écrivent donc respectivement

$$t_2 : y = x - 1 \quad \text{ou} \quad t_2 : y = 31 - 15x.$$

(c) Pour trouver l'angle $\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1|$ formé entre ces deux tangentes en P, on résout

$$\tan\varphi = |\tan(\varphi_1 - \varphi_2)|$$

où φ_1 et φ_2 sont les angles respectifs des droites avec l'horizontale. Puisque $\tan(\varphi_1) = 6$ et $\tan(\varphi_2) = 1$ ou $\tan(\varphi_2) = -15$, on a

$$\varphi = \arctan^{-1}\left|\frac{6-1}{1+6}\right| = \arctan(\frac{5}{7}), \quad \text{ou}$$
$$\varphi = \arctan^{-1}\left|\frac{6+15}{1-90}\right| = \arctan(\frac{21}{89}).$$

Question 12: *Cette question est notée sur 5 points.*

.5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 \cos\left(\frac{1}{\sin(x)}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) En présentant vos étapes de calcul, calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$ et en déduire que f est continue en $x = 0$.

(b) En présentant vos étapes de calcul, calculer le nombre dérivé $f'(0)$.

(c) En utilisant les règles de calcul, calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.

(d) En justifiant votre réponse, déterminer si la fonction f est continûment dérivable en $x = 0$.

Solution

(a) Le cosinus étant borné, on a par le théorème "0 x borné" que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Par conséquent f est continue en $x = 0$.

(b) On calcule la limite du rapport de Newton :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3 \cos\left(\frac{1}{\sin(x)}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} 2x^2 \cos\left(\frac{1}{\sin(x)}\right) \underbrace{=}_{\text{0 x borné}} 0 = f'(0).$$

(c) On a pour $x \neq 0$:

$$f'(x) = 6x^2 \cos\left(\frac{1}{\sin(x)}\right) + 2x^3 \sin\left(\frac{1}{\sin(x)}\right) \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}.$$

(d) On calcule $\lim_{x\to 0} f'(x)$:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} 6x^2 \cos\left(\frac{1}{\sin(x)}\right) + 2x^3 \sin\left(\frac{1}{\sin(x)}\right) \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \\ &\underbrace{=}_{\text{0 x borné et IPE}} 0 + \lim_{x\to 0} 2x^3 \sin\left(\frac{1}{\sin(x)}\right) \frac{\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} 2x \sin\left(\frac{1}{\sin(x)}\right) \cos(x) = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent f' est continue en $x = 0$ et donc f est continûment dérivable en $x = 0$