Enseignant·es: Bossoney, Dubuis, Khukhro
Analyse 1 - CMS
7 novembre 2022
Durée : 105 minutes

1

Dalton Joe

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (2 points)

Calculer le terme en x^6 du développement de $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^{10}$.

- [x] $180x^6$
- [ ] $210x^6$
- [ ] $90x^6$
- [ ] $45x^6$

Question 2 (2 points)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré. On note Δ le discriminant de $P(x)$. Si $a > 0$ et les racines x_1, x_2 de $P(x)$ satisfont $x_1 < -1 < x_2 < 0$, alors

- [ ] $\Delta < 0$, $P(-1) < 0$ et $\dfrac{c}{a} > 0$.
- [x] $\Delta > 0$, $P(-1) < 0$ et $\dfrac{c}{a} > 0$.
- [ ] $\Delta > 0$, $P(-1) < 0$ et $\dfrac{c}{a} < 0$.
- [ ] $\Delta > 0$, $P(-1) > 0$ et $\dfrac{c}{a} < 0$.

Question 3 (2 points)

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Laquelle des expressions suivantes est égale à $A(x) = \sqrt[3]{x+\dfrac{1}{x}}$?

- [ ] $a(x) = x \cdot \sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^2}}$
- [x] $b(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^2}}$
- [ ] $c(x) = |x| \cdot \sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^2}}$
- [ ] $d(x) = \sqrt[3]{|x|} \cdot \sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^2}}$

Question 4 (2 points)

Calculer la valeur de $\dfrac{2}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)} + \dfrac{2}{\sqrt{3}+1+\sqrt{2}}$.

- [ ] $1+\sqrt{2}$
- [ ] $\dfrac{1}{2}$
- [ ] $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
- [x] 1

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 5: *Cette question est notée sur 3 points.*

☐ .5 ☐ .5 ☐ .5

■ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x-1} \geq \frac{-1}{2x-2}$ par rapport à la variable x.

Solution

Domaine de définition: $D_{\text{déf}} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-1} \geq \frac{-1}{2x-2} &\iff \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2x-2} \geq 0 \\
&\iff \frac{2}{2x-2} + \frac{1}{2x-2} \geq 0 \\
&\iff \frac{3}{2x-2} \geq 0 \\
&\iff 2x-2 > 0 \\
&\iff 2x > 2 \\
&\iff x > 1.
\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc $S =]1, \infty[$.

Question 6: *Cette question est notée sur 6 points.*

.5 .5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5 6

Résoudre l'équation $|3x - m + 6| = 3x - 3m$ par rapport à la variable x, en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$.
Solution
Domaine de définition: $D_{\text{déf}} = \mathbb{R}$.
Condition de positivité: $3x - 3m \geq 0$, $D_{\text{pos}} = \{x \in \mathbb{R} : 3x - 3m \geq 0\} = [m, \infty[$.

Sur D_{pos}, $\quad |3x - m + 6| = 3x - 3m \iff \begin{cases} 3x - m + 6 = 3x - 3m & (a) \\ 3x - m + 6 = -3x + 3m & (b) \end{cases}$

(a)

$$3x - m + 6 = 3x - 3m \iff 0 \cdot x = 6 + 2m.$$

Donc

- si $m = -3$, $S_a = D_{\text{pos}} \cap \mathbb{R} = [m, \infty[$,
- si $m \neq -3$, $S_a = \emptyset$.

(b)

$$\begin{aligned} 3x - m + 6 = -3x + 3m &\iff 6x = 4m - 6 \\ &\iff x = \frac{4m-6}{6}. \end{aligned}$$

Pour quel m la solution est-elle dans D_{pos} ?

$$\begin{aligned} \frac{4m-6}{6} \in D_{\text{pos}} &\iff \frac{4m-6}{6} \geq m \\ &\iff -3 \geq m. \end{aligned}$$

Alors on a

- si $m > -3$, $S_b = D_{\text{pos}} \cap \{\frac{4m-6}{6}\} = \emptyset$,
- si $m \leq -3$, $S_b = D_{\text{pos}} \cap \{\frac{4m-6}{6}\} = \{\frac{4m-6}{6}\}$.

L'ensemble solution est donné par $S = S_a \cup S_b$:

- si $m < -3$, $S_a = \emptyset$, $S_b = \{\frac{4m-6}{6}\}$ et donc $S = \{\frac{4m-6}{6}\}$,
- si $m = -3$, $S_a = [m, \infty[$, $S_b = \{\frac{4m-6}{6}\}$ et donc $S = [m, \infty[$ (car pour $m = -3$, $\frac{4m-6}{6} \in [m, \infty[$),
- si $m > -3$, $S_a = \emptyset$, $S_b = \emptyset$ et donc $S = \emptyset$.

Question 7: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
■0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7

Parmi les énoncés suivants, déterminer s'ils sont vrais ou faux. S'ils sont vrais, il n'y a pas besoin de justifier. S'ils sont faux, donner un contre-exemple.

(a) Si (a_n) converge vers $a \in \mathbb{R}$ et si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n > 1$, alors $a \geq 1$.

(b) Si $(|a_n|)$ converge vers $a > 0$, alors (a_n) converge soit vers a, soit vers $-a$.

(c) Si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} > a_n$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

(d) Soient (a_n), (b_n) deux suites. On suppose que (b_n) est strictement décroissante et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n > 0$ et $-b_n < a_n < b_n$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.

Solution

(a) Vrai.

(b) Faux. Si $a_n = (-1)^n$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = 1$, mais (a_n) ne converge ni vers 1, ni vers -1.

(c) Faux. Si $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, alors $a_{n+1} > a_n$ mais $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1 < \infty$.

(d) Faux. Si $b_n = 2 + \frac{1}{n}$ et si $a_n = 1$, alors $-b_n < a_n < b_n$ mais $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1 \neq 2 = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.

Question 8: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
■0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

(a) Soit (a_n) une suite. Donner la définition de $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

(b) Montrer, à l'aide de la définition, que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2n+2} = +\infty$.

(c) Soit (a_n) la suite définie par

$$a_n = \frac{n}{n+3} + \frac{n+1}{n+4} + \frac{n+2}{n+5} + \ldots + \frac{2n-1}{2n+2}.$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Solution

(a)

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que si } n \geq N \text{ alors } a_n > A.$$

(b) Soit $A > 0$. On doit montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq N, \frac{n^2}{2n+21} > A.$$

On résout l'inégalité paramétriquement :

$$\begin{aligned}
&\frac{n^2}{2n+2} > A \\
&\Leftrightarrow n^2 - 2An - 2A > 0 \quad \big(\Delta = 4A^2 + 8A = 4A(A+2) > 0 \big) \\
&\Leftrightarrow n \in \left]-\infty, \frac{2A - \sqrt{4A^2+8A}}{2}\right[\cup \left]\frac{2A + \sqrt{4A^2+8A}}{2}, +\infty\right[.
\end{aligned}$$

Par conséquent, il suffit de choisir $N > \frac{2A + \sqrt{4A^2+8A}}{2}$.

(c) On constate que chaque terme de la somme peut être minoré par $\frac{n}{2n+2}$

$$a_n = \underbrace{\frac{n}{n+3}}_{\geq \frac{n}{2n+2}} + \underbrace{\frac{n+1}{n+4}}_{\geq \frac{n}{2n+2}} + \underbrace{\frac{n+2}{n+5}}_{\geq \frac{n}{2n+2}} + \ldots + \underbrace{\frac{2n-1}{2n+2}}_{\geq \frac{n}{2n+2}}.$$

Comme a_n est la somme de n termes, on a donc $a_n \geq n\frac{n}{2n+2} = \frac{n^2}{2n+2}$.

Par les règles de calcul (théorème du gendarme), comme $\frac{n^2}{2n+2} \to +\infty$, on a bien $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.