EPFL

Enseignant·es: Bossoney, Dubuis, Khukhro
Analyse 1 - Contrôle 2 - CMS
9 janvier 2025
Durée : 105 minutes

1

Robin des Bois

SCIPER : **999999**

Signature

Absent.e

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 9 questions et 16 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 30 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page. Au démarrage de l'épreuve, signez la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - les points indiqués si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, les enseignant·es se réservent le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Quelques formules de trigonométrie

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\ \cos y + \cos x\ \sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\ \cos y - \sin x\ \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\ \tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Formules de transformation produit-somme :

$$\cos(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}[\,\cos(x+y)+\cos(x-y)\,]$$

$$\sin(x)\cdot\sin(y) = -\frac{1}{2}[\,\cos(x+y)-\cos(x-y)\,]$$

$$\sin(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}[\,\sin(x+y)+\sin(x-y)\,]$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Expressions des fonctions trigonométriques en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (2 points)
La limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}-1}\left[\sin\left(\frac{1}{x}\right)+2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

vaut

- ☐ $+\infty$
- ☐ -3
- ☐ $-\infty$
- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 3
- ☐ $\frac{-1}{2}$
- ☐ -1

Question 2 (3 points)
Soit la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-2\cos(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)-\cos(x)\sin^2(x)}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$$

Pour quelle valeur de a, la fonction f est-elle continue en $x=0$?

- ☐ Aucune valeur de a ne convient.
- ☐ $a=\frac{1}{2}$.
- ☐ $a=-\frac{1}{2}$.
- ☐ $a=-1$.

Question 3 (3 points)
Soit f la fonction définie par $f(x)=2x+(x-2)\cdot E(1-x)$ pour tout $x\in[0,2]$. Donner la plus grande valeur ε pour laquelle il n'existe aucun $\delta>0$ tel que

$$0<|x-1|<\delta \Rightarrow \left|f(x)-\frac{5}{2}\right|<\varepsilon.$$

- ☐ $\varepsilon=\dfrac{3}{4}$
- ☐ $\varepsilon=\dfrac{1}{4}$
- ☐ $\varepsilon=1$
- ☐ $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$
- ☐ $\varepsilon=\dfrac{1}{8}$
- ☐ $\varepsilon=\dfrac{1}{3}$

Question 4 (3 points)
Donner la valeur de A où A est l'approximation linéaire de $f(x_0+\Delta x)$ avec $f(x)=\sin(\pi\sqrt[3]{x})$, $x_0=8$ et $\Delta x=0.012$

- ☐ 0.001
- ☐ $\pi\cdot 0.001$
- ☐ $\pi\cdot\sqrt[3]{8.012}$
- ☐ $\pi\cdot 2.001$

Question 5 (2 points)
La limite

$$\lim_{x\to-\infty}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2x}\right)$$

vaut

- ☐ $\dfrac{\pi}{2}$.
- ☐ -1
- ☐ $\dfrac{-\pi}{2}$.
- ☐ La limite n'existe pas.
- ☐ 0.
- ☐ 1

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées à la correction.

Question 6: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐ 0 ☐ .5 ☐ 1 ☐ .5 ☐ 2 ☐ .5 ☐ 3 ☐ .5 ☐ 4

(a) Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et $L \in \mathbb{R}$. Donner la définition de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.

(b) A l'aide de la définition, montrer que $\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \cos^2\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$.

Question 7: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Pour chaque question, écrire seulement la réponse finale dans l'espace prévu.

(a) (1 point)

Donner un exemple d'une fonction f, croissante et définie sur $[0, 1]$, telle que $f(0)f(1) < 0$ mais qui ne s'annule pas sur $[0, 1]$.

(b) (1 point)

Donner un exemple d'un ensemble D et d'une fonction f dérivable sur D tels que $0 \in D$, $f(0) = 0$, $f'(x) = 1$ pour tout $x \in D$ et tels qu'il existe au moins un $x \in D$ pour lequel $f(x) \neq x$.

(c) (1 point)

Donner un exemple d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, non croissante et bijective de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(d) (1 point)

Donner un exemple d'une fonction f continue sur $[-1, 1]$, telle que $f(-1) = f(1) = 0$ mais telle qu'il n'existe aucun $c \in]-1, 1[$ avec $f'(c) = 0$.

Question 8: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

(a) Montrer, en utilisant la définition en termes du rapport de Newton, que

$$\left[\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)\right]' = \frac{2}{3}\sin\left(\frac{x}{3}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Soit la fonction $f : [0, 3\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2\left(\frac{x}{3}\right)$. En quel point (x_0, y_0) la droite

$$y = 2\sqrt{3}x - 4\sqrt{3}\pi + \frac{3}{4}$$

est-elle normale au graphe de f ?

Question 9: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5
☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - 2x + \sqrt{(1-x)^2 + 1}}{x - 1}, & x \neq 1, \\ -2, & x = 1. \end{cases}$$

(a) En présentant vos étapes de calcul, donner la valeur du nombre dérivé $f'(1)$.

(b) En utilisant les règles de calcul, calculer $f'(x)$ pour $x \neq 1$.

(c) En justifiant votre réponse, déterminer si la fonction f est continûment dérivable en $x = 1$.