















Enseignant·es: Bossoney, Dubuis, Khukhro
Analyse 1 - CMS
9 janvier 2024
Durée : 105 minutes

Robin des Bois

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 30 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - les points indiqués si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		



Quelques formules de trigonométrie

Formules d'addition :

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Formules de bisection :

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2} \quad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2} \quad \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

Formules de transformation produit-somme :

$$\cos(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\sin(x) \cdot \sin(y) = -\frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos(x - y)]$$

$$\sin(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \sin x - \sin y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Expressions des fonctions trigonométriques en fonction de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\sin x = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \tan x = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$



Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 (3 points)

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur \mathbb{R} . Calculer l'approximation linéaire A de $(f \circ g)(x_0 + \Delta x)$ en $x_0 = 2$ pour $\Delta x = 0,1$.

Les valeurs suivantes sont données:

$$\begin{aligned} f(2) = 3 \quad f(5) = 7 \quad f'(2) = 13 \quad f'(5) = 19 \quad f'(17) = 29 \\ g(2) = 5 \quad g(3) = 11 \quad g'(2) = 17 \quad g'(3) = 23 \quad g'(13) = 31 \end{aligned}$$

☐ $A = 9,9$

☐ $A = 37,1$

☐ $A = 7,1$

☐ $A = 29,1$

☐ $A = 39,3$

☐ $A = 18,6$

Question 2 (3 points)

La limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2 + 4x})(4 - \sin(3x))$$

vaut

☐ 20.

☐ 12.

☐ $-\infty$.

☐ 0.

☐ $+\infty$.

☐ -20.

Question 3 (3 points)

Soit a un paramètre réel et soit la fonction

$$f(x) = \frac{2x^2 + ax + a + 10}{x^2 + 2x - 3}.$$

Pour quelle valeur du paramètre a la fonction est-elle prolongeable par continuité en $x = 1$?

☐ $a = -6$

☐ Pour tout $a \in \mathbb{R}$

☐ $a = -3$

☐ $a = 1$

☐ $a = 2$

☐ Pour aucune valeur de a

**Question 4** (3 points)

On considère la fonction f définie au voisinage de $x_0 = 0$ par $f(0) = 0$ et

$$f(x) = \frac{-2 \sin^2(x) + \sin(x) \sin(2x) - (6 \cos(x) - 6) \sin^2(x)}{\tan(x^2)} \quad \text{pour } x \neq 0.$$

Parmi les fonctions ci-dessous, laquelle est un infiniment petit équivalent (IPE) de f au voisinage de $x_0 = 0$?

☐ $-4x^2$

☐ $-2x^2$

☐ $-3x^2$

☐ $2x^2$

☐ $4x^2$

☐ $2x$

☐ $2x^3$

☐ $-2x$

☐ $3x^2$

Question 5 (3 points)

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2} & \text{si } x < 2, \\ 2 & \text{si } x = 2, \\ (x - 2)^2 + \frac{5}{2} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Parmi les couples de valeurs pour ε et δ suivants, lequel vérifie

$$\forall x, |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(2)| < \varepsilon.$$

☐ $\varepsilon = 1/2, \delta = 1/4.$

☐ $\varepsilon = 1, \delta = 3/2.$

☐ $\varepsilon = 1, \delta = 1/2.$

☐ $\varepsilon = 1/4, \delta = 1/2.$

**Vrai ou faux**

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.

Question 6 (1 point)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle $[0, 1]$. Si $f(0) < -3$ et si $f(1) > 4$, alors $\exists x_0 \in]0, 1[$ tel que $f(x_0) \in [-3, 4]$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 7 (1 point)

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $+\infty$ et deux suites $(x_n), (y_n)$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty.$$

S'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 8 (1 point)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $+\infty$. Si f ne tend pas vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$, alors il n'existe aucune suite (x_n) telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 9 (1 point)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en x_0 mais non dérivable en x_0 . La fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = (x - x_0)f(x)$ est dérivable en x_0 .

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 10 (1 point)

Soient $a < b$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tels que la fonction dérivée f' est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$. On suppose de plus que f' est dérivable sur $]a, b[$. Alors $\exists x_0 \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} = f''(x_0).$$

☐ VRAI ☐ FAUX



Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

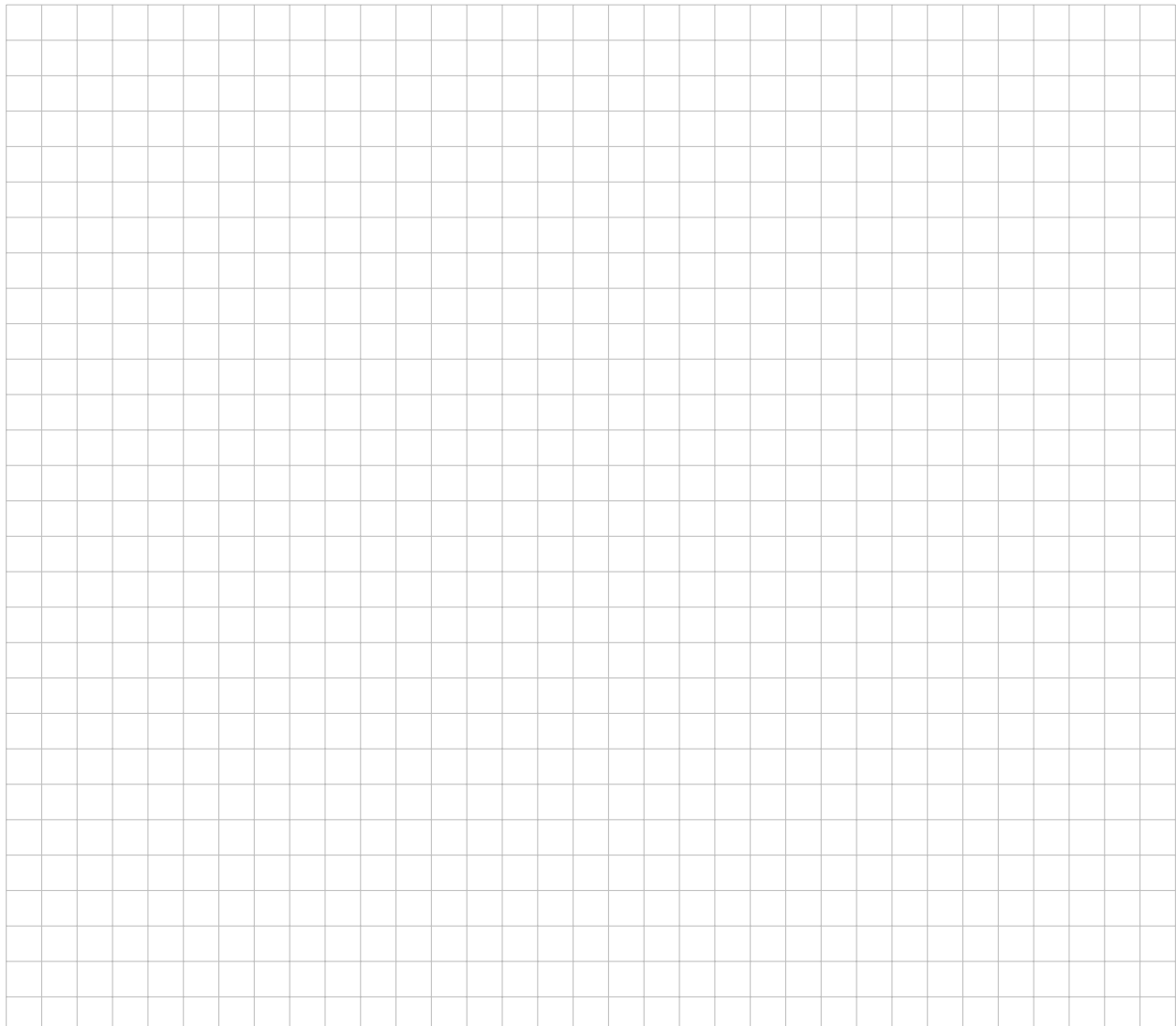
Question 11: Cette question est notée sur 5 points.

<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	.5
<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 5				

On se donne le point $P(2, 1)$ et les paraboles

$$f_1(x) = x^2 + 2x - 7, \quad f_2(x) = -2x^2 + x - 1$$

- (a) Déterminer l'équation de la tangente t_1 au graphe de f_1 au point P .
- (b) Déterminer les équations de toutes les tangentes au graphe de f_2 passant par P .
- (c) Calculer l'angle géométrique formé en P par chacune des tangentes trouvées en (b) avec la droite t_1 trouvée en (a).







+1/8/53+





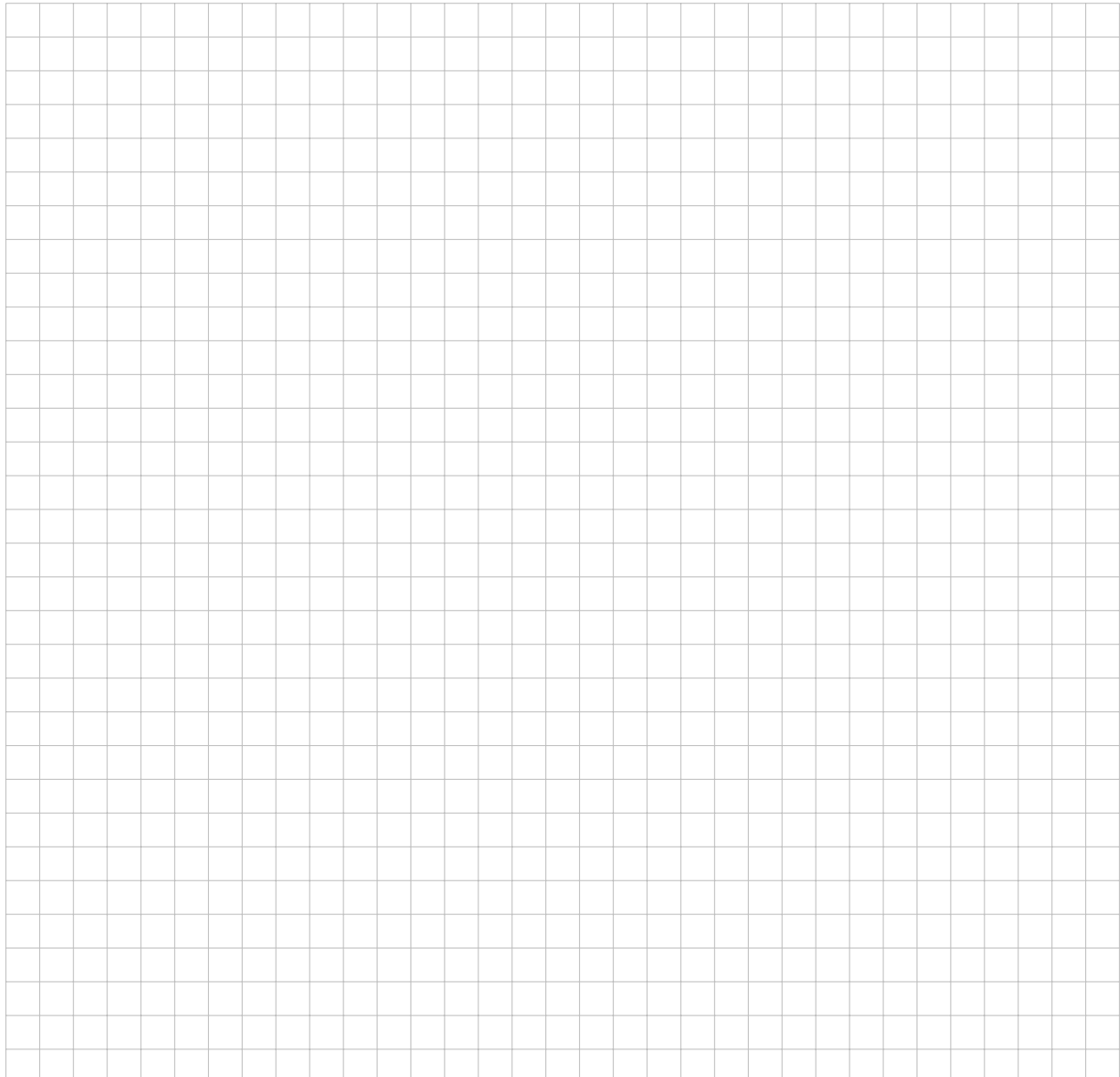
Question 12: Cette question est notée sur 5 points.

<input type="text"/>	.5	<input type="text"/>	.5	<input type="text"/>	.5	<input type="text"/>	.5	<input type="text"/>	.5		
<input type="text"/>	0	<input type="text"/>	1	<input type="text"/>	2	<input type="text"/>	3	<input type="text"/>	4	<input type="text"/>	5

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 \cos\left(\frac{1}{\sin(x)}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- (a) En présentant vos étapes de calcul, calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et en déduire que f est continue en $x = 0$.
- (b) En présentant vos étapes de calcul, calculer le nombre dérivé $f'(0)$.
- (c) En utilisant les règles de calcul, calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
- (d) En justifiant votre réponse, déterminer si la fonction f est continûment dérivable en $x = 0$.





+1/10/51+







2













Enseignant·es: Bossoney, Dubuis, Khukhro
Analyse 1 - CMS
9 janvier 2024
Durée : 105 minutes

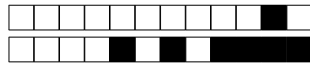
Marianne

SCIPER : **888888**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 30 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - les points indiqués si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		



Quelques formules de trigonométrie

Formules d'addition :

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Formules de bisection :

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2} \quad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2} \quad \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

Formules de transformation produit-somme :

$$\cos(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\sin(x) \cdot \sin(y) = -\frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos(x - y)]$$

$$\sin(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \sin x - \sin y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Expressions des fonctions trigonométriques en fonction de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\sin x = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \tan x = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$



Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 (3 points)

Soit a un paramètre réel et soit la fonction

$$f(x) = \frac{2x^2 + ax + a + 10}{x^2 + 2x - 3}.$$

Pour quelle valeur du paramètre a la fonction est-elle prolongeable par continuité en $x = 1$?

☐ $a = -6$

☐ $a = 2$

☐ $a = -3$

☐ Pour aucune valeur de a

☐ Pour tout $a \in \mathbb{R}$

☐ $a = 1$

Question 2 (3 points)

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur \mathbb{R} . Calculer l'approximation linéaire A de $(f \circ g)(x_0 + \Delta x)$ en $x_0 = 2$ pour $\Delta x = 0, 1$.

Les valeurs suivantes sont données:

$$f(2) = 3 \quad f(5) = 7 \quad f'(2) = 13 \quad f'(5) = 19 \quad f'(17) = 29$$

$$g(2) = 5 \quad g(3) = 11 \quad g'(2) = 17 \quad g'(3) = 23 \quad g'(13) = 31$$

☐ $A = 37, 1$

☐ $A = 29, 1$

☐ $A = 18, 6$

☐ $A = 9, 9$

☐ $A = 39, 3$

☐ $A = 7, 1$

Question 3 (3 points)

La limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2} + 4x)(4 - \sin(3x))$$

vaut

☐ 20.

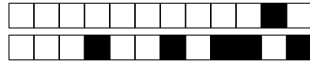
☐ $-\infty$.

☐ -20.

☐ 0.

☐ $+\infty$.

☐ 12.

**Question 4** (3 points)

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2} & \text{si } x < 2, \\ 2 & \text{si } x = 2, \\ (x - 2)^2 + \frac{5}{2} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Parmi les couples de valeurs pour ε et δ suivants, lequel vérifie

$$\forall x, |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(2)| < \varepsilon.$$

☐ $\varepsilon = 1, \delta = 1/2.$

☐ $\varepsilon = 1/2, \delta = 1/4.$

☐ $\varepsilon = 1/4, \delta = 1/2.$

☐ $\varepsilon = 1, \delta = 3/2.$

Question 5 (3 points)

On considère la fonction f définie au voisinage de $x_0 = 0$ par $f(0) = 0$ et

$$f(x) = \frac{-2 \sin^2(x) + \sin(x) \sin(2x) - (6 \cos(x) - 6) \sin^2(x)}{\tan(x^2)} \quad \text{pour } x \neq 0.$$

Parmi les fonctions ci-dessous, laquelle est un infiniment petit équivalent (IPE) de f au voisinage de $x_0 = 0$?

☐ $2x$

☐ $2x^2$

☐ $3x^2$

☐ $-2x^2$

☐ $2x^3$

☐ $-3x^2$

☐ $4x^2$

☐ $-4x^2$

☐ $-2x$

**Vrai ou faux**

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.

Question 6 (1 point)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle $[0, 1]$. Si $f(0) < -3$ et si $f(1) > 4$, alors $\exists x_0 \in]0, 1[$ tel que $f(x_0) \in [-3, 4]$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 7 (1 point)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $+\infty$. Si f ne tend pas vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$, alors il n'existe aucune suite (x_n) telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 8 (1 point)

Soient $a < b$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tels que la fonction dérivée f' est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$. On suppose de plus que f' est dérivable sur $]a, b[$. Alors $\exists x_0 \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} = f''(x_0).$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 9 (1 point)

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $+\infty$ et deux suites $(x_n), (y_n)$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty.$$

S'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 10 (1 point)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en x_0 mais non dérivable en x_0 . La fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = (x - x_0)f(x)$ est dérivable en x_0 .

☐ VRAI ☐ FAUX



Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

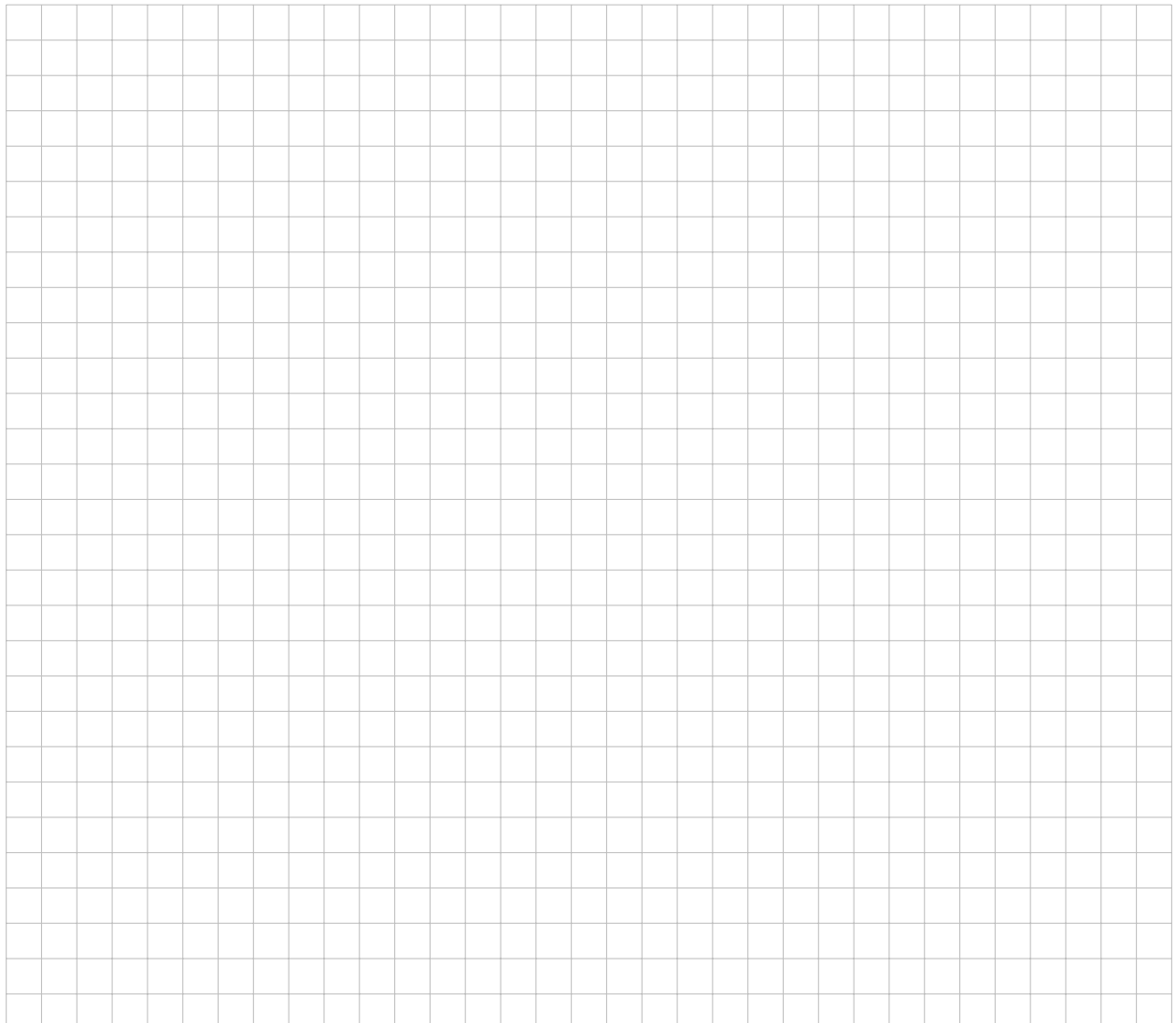
Question 11: Cette question est notée sur 5 points.

<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	.5
<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 5				

On se donne le point $P(2, 1)$ et les paraboles

$$f_1(x) = x^2 + 2x - 7, \quad f_2(x) = -2x^2 + x - 1$$

- (a) Déterminer l'équation de la tangente t_1 au graphe de f_1 au point P .
- (b) Déterminer les équations de toutes les tangentes au graphe de f_2 passant par P .
- (c) Calculer l'angle géométrique formé en P par chacune des tangentes trouvées en (b) avec la droite t_1 trouvée en (a).







+2/8/41+





Question 12: Cette question est notée sur 5 points.

<input type="text"/>	.5	<input type="text"/>	.5	<input type="text"/>	.5	<input type="text"/>	.5	<input type="text"/>	.5
<input type="text"/> 0	<input type="text"/>	1	<input type="text"/>	2	<input type="text"/>	3	<input type="text"/>	4	<input type="text"/> 5

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 \cos\left(\frac{1}{\sin(x)}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- (a) En présentant vos étapes de calcul, calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et en déduire que f est continue en $x = 0$.
- (b) En présentant vos étapes de calcul, calculer le nombre dérivé $f'(0)$.
- (c) En utilisant les règles de calcul, calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
- (d) En justifiant votre réponse, déterminer si la fonction f est continûment dérivable en $x = 0$.

