



1

Enseignant-es: Bossoney, Dubuis, Khukhro  
Analyse 1 - CMS  
10 janvier 2023  
Durée : 105 minutes

# Analyse 1

SCIPER: 999999

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - les points indiqués si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

| Respectez les consignes suivantes   Observe this guidelines   Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien   |   |   |
|--|---|---|
| choisir une réponse   select an answer<br>Antwort auswählen  | ne PAS choisir une réponse   NOT select an answer<br>NICHT Antwort auswählen        | Corriger une réponse   Correct an answer<br>Antwort korrigieren   |
|     |  |   |
| ce qu'il ne faut <b>PAS</b> faire   what should <b>NOT</b> be done   was man <b>NICHT</b> tun sollte   |   |   |
|       |   |   |



## Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

### Question 1 (2 points)

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $x_0 = 1$  et soit  $n$  la normale au graphe de  $f$  au point  $(x_0, f(x_0))$  d'équation

$$n : y = 2x.$$

Alors la tangente  $t$  au graphe au point  $(x_0, f(x_0))$  est d'équation

☐  $t : y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$

☐  $t : y = -2x + 4.$

☐  $t : y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1).$

☐  $t : y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$

### Question 2 (3 points)

Soient les courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  définies par leur équations :

$$\Gamma_1 : y = 4\sqrt{x} \text{ et } \Gamma_2 : y = 5 - x^3.$$

Les courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  s'intersectent au point  $(1, 4)$  et on note  $t_1$  la tangente à la courbe  $\Gamma_1$  et  $t_2$  la tangente à  $\Gamma_2$  au point  $(1, 4)$ .

Soit finalement  $\varphi$  la mesure de l'angle géométrique aigu entre  $t_1$  et  $t_2$  au point  $(1, 4)$ . On cherche la valeur de  $\varphi$ .

*Indication :* on rappelle la formule  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}.$

☐  $\varphi = \frac{\pi}{2}.$

☐  $\varphi = \frac{\pi}{4}.$

☐  $\varphi = \frac{\pi}{3}.$

☐  $\varphi = \frac{\pi}{6}.$

### Question 3 (2 points)

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Parmi les fonctions ci-dessous, laquelle est telle que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ?

☐  $f(x) = \frac{1}{\sin(x - x_0)}$

☐  $f(x) = \left(2 + \sin\left(\frac{1}{x - x_0}\right)\right) \frac{1}{x - x_0}$

☐  $f(x) = \left(2 - \sin\left(\frac{1}{x - x_0}\right)\right) \frac{1}{|x - x_0|}$

☐  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \frac{1}{x - x_0}$

### Question 4 (3 points)

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{x+a}{x^2-1}$ . Pour quelle valeur de  $a$  la fonction  $f$  est-elle prolongeable par continuité en  $x = -1$ ?

☐  $a = 0$

☐  $a = -1$

☐ Aucune de ces possibilités

☐  $a = 1$



## Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 5:** Cette question est notée sur 4 points.

|                          |   |                          |   |                          |   |                          |   |                          |   |
|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> | . | <input type="checkbox"/> | . | <input type="checkbox"/> | . | <input type="checkbox"/> | . | <input type="checkbox"/> | . |
| <input type="checkbox"/> | 0 | <input type="checkbox"/> | 1 | <input type="checkbox"/> | 2 | <input type="checkbox"/> | 3 | <input type="checkbox"/> | 4 |

- (a) Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction définie sur un voisinage épointé de  $x_0 \in \mathbb{R}$ , et  $l \in \mathbb{R}$ . Donner la définition de  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .
- (b) Soit  $f : \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-1}, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1. \end{cases}$$

- Quelle est la valeur  $l$  de  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  ? Montrer, à l'aide de la définition, que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = l$ .
- La fonction  $f$  est-elle continue en  $x = 1$  ?





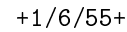
+1/4/57+





+1/5/56+



[illegible]

- (a) Soient  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  deux suites telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur tout  $\mathbb{R}$  et  $l \in \mathbb{R}$ . Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = l$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ .
- (b) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $D_f = \mathbb{R}$ . Soient  $a \neq b$  tels que  $f(a) > 0$  et  $f(b) < 0$ . Alors il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f(c) = 0$ .
- (c) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie au voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Si  $f$  est continue en  $x_0$ , alors la fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g(x) = f(x)(x - x_0)$  est dérivable en  $x_0$ .
- (d) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $[0, 1] \subset D_f$ . Si  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  et dérivable sur  $]0, 1[$  et  $f(0) > f(1)$ , alors il existe  $c \in ]0, 1[$  tel que  $f'(c) < 0$ .

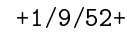


+1/7/54+







[illegible]
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^3(x)}{\sqrt[3]{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$



+1/10/51+





