EPFL

Enseignant·es: Bossoney, Dubuis, Khukhro
Analyse 1 - CMS
10 janvier 2023
Durée : 105 minutes

1

Analyse 1

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (2 points)
Soit f une fonction dérivable en $x_0 = 1$ et soit n la normale au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$ d'équation

$$n : y = 2x.$$

Alors la tangente t au graphe au point $(x_0, f(x_0))$ est d'équation

- ☐ $t : y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.
- ☐ $t : y = -2x + 4$.
- ☐ $t : y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$.
- ☐ $t : y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Question 2 (3 points)
Soient les courbes Γ_1 et Γ_2 définies par leur équations :

$$\Gamma_1 : y = 4\sqrt{x} \text{ et } \Gamma_2 : y = 5 - x^3.$$

Les courbes Γ_1 et Γ_2 s'intersectent au point $(1, 4)$ et on note t_1 la tangente à la courbe Γ_1 et t_2 la tangente à Γ_2 au point $(1, 4)$.
Soit finalement φ la mesure de l'angle géométrique aïgu entre t_1 et t_2 au point $(1, 4)$. On cherche la valeur de φ.
Indication : on rappelle la formule $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$.

- ☐ $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
- ☐ $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
- ☐ $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
- ☐ $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Question 3 (2 points)
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Parmi les fonctions ci-dessous, laquelle est telle que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$?

- ☐ $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x - x_0)}$
- ☐ $f(x) = \left(2 + \sin\left(\dfrac{1}{x - x_0}\right)\right) \dfrac{1}{x - x_0}$
- ☐ $f(x) = \left(2 - \sin\left(\dfrac{1}{x - x_0}\right)\right) \dfrac{1}{|x - x_0|}$
- ☐ $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x - x_0}\right) \dfrac{1}{x - x_0}$

Question 4 (3 points)
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x + a}{x^2 - 1}$. Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle prolongeable par continuité en $x = -1$?

- ☐ $a = 0$
- ☐ $a = -1$
- ☐ Aucune de ces possibilités
- ☐ $a = 1$

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 5: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

(a) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction définie sur un voisinage épointé de $x_0 \in \mathbb{R}$, et $l \in \mathbb{R}$. Donner la définition de $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

(b) Soit $f : \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-1}, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1. \end{cases}$$

- Quelle est la valeur l de $\lim_{x \to 1} f(x)$? Montrer, à l'aide de la définition, que $\lim_{x \to 1} f(x) = l$.
- La fonction f est-elle continue en $x = 1$?

Question 6: *Cette question est notée sur 8 points.*

.5 .5 .5 .5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5 6 7 8

Parmi les énoncés suivants, déterminer s'ils sont vrais ou faux. S'ils sont vrais, justifier. S'ils sont faux, donner un contre-exemple.

(a) Soient (a_n), (b_n) deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur tout $\mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = l$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $D_f = \mathbb{R}$. Soient $a \neq b$ tels que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$. Alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$.

(c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f est continue en x_0, alors la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)(x - x_0)$ est dérivable en x_0.

(d) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $[0,1] \subset D_f$. Si f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ et $f(0) > f(1)$, alors il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) < 0$.

Question 7: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^3(x)}{\sqrt[3]{x^2}}, & x \neq 0, \\ \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) En présentant vos étapes de calcul, calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et en déduire que f est continue en $x = 0$.

(b) En présentant vos étapes de calcul, calculer le nombre dérivé $f'(0)$.

(c) En utilisant les règles de calcul, calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.

(d) En justifiant votre réponse, déterminer si la fonction f est continûment dérivable en $x = 0$.