Enseignant·es: Bossoney, Dubuis, Khukhro
Analyse 1 - Contrôle 1 - CMS
7 novembre 2024
Durée : 105 minutes

1

Robin des Bois

SCIPER : **999999**

Signature .... ☐ Absent

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 9 questions et 16 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 30 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page. Au démarrage de l'épreuve, signez la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, les enseignant·es se réservent le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (3 points)
Résoudre l'inéquation suivante par rapport à $x \in \mathbb{R}$ et en fonction de $m \in \mathbb{R}$:

$$\Big|1 - |x-m|\Big| \leq |x-m|.$$

L'ensemble solution S est donné par

- ☐ $S = \left[-\frac{1}{2}+m, \frac{1}{2}+m\right]$
- ☐ $S = \mathbb{R}$
- ☐ $S = \left]-\infty, \frac{1}{2}+m\right]$
- ☐ $S = \left]-\infty, -\frac{1}{2}+2m\right] \cup \left[\frac{1}{2}+2m, +\infty\right[$
- ☐ $S = \left[-\frac{1}{2}+m, +\infty\right[$
- ☐ $S = \left]-\infty, -\frac{1}{2}+m\right] \cup \left[\frac{1}{2}+m, +\infty\right[$
- ☐ $S = \emptyset$
- ☐ $S = \left]-\infty, -\frac{1}{2}+m\right]$
- ☐ $S = \left[\frac{1}{2}+m, +\infty\right[$

Question 2 (3 points)
Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré, tel que $a, b, c \in \mathbb{R}$ satisfont les quatre propriétés suivantes:

- $a < 0$
- $b^2 - 4ac > 0$
- $a + b + c > 0$
- $a - b + c < 0$

Soient x_1 et x_2 les racines du trinôme $P(x)$, telles que $x_1 \leq x_2$. Que peut-on conclure sur x_1 et x_2 ?

- ☐ $1 < x_1 < x_2$
- ☐ $x_1 = -1,\ x_2 = 1$
- ☐ $x_1 < x_2 < -1$
- ☐ $-1 < x_1 < 1 < x_2$
- ☐ $x_1 < -1 < x_2 < 1$
- ☐ $-1 < x_1 < x_2 < 1$

Question 3 (3 points)
Soit (a_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$a_n = \sqrt{9n^4 + 2n^2} - \sqrt{9n^4 - n^2 + n + 1}.$$

Alors

- ☐ $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty.$
- ☐ $\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{6}.$
- ☐ $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty.$
- ☐ $\lim_{n \to +\infty} a_n = 1$
- ☐ $\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{3}.$
- ☐ $\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{2}.$

Question 4 (2 points)
Soit (a_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - \sqrt{n^4 + 1}}.$$

Lequel des encadrements suivants de a_n est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et permet de conclure que (a_n) converge par le théorème des deux gendarmes ?

- ☐ $\frac{2n^2+2}{n^2} \leq a_n \leq \frac{2n^2+2n}{n}.$
- ☐ $-\frac{2n^2+2}{n^2} \leq a_n \leq -2.$
- ☐ $1 \leq a_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}.$
- ☐ $2 \leq a_n \leq \frac{2n^2+2}{n^2}.$

Question 5 (2 points)
Soit (a_n) la suite définie par $a_n = \frac{-1}{\sqrt{n+1}}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, parmi les conditions suivantes sur $N \in \mathbb{N}$, celle qui satisfait que

$$\forall \varepsilon > 0, n \geq N \implies |a_n| < \varepsilon.$$

- ☐ $N < 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$
- ☐ $N < \frac{1}{\varepsilon} - 1$
- ☐ $N > 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$
- ☐ $N < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1$
- ☐ $N > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1$
- ☐ $N < \frac{1}{\varepsilon^2} - 1$
- ☐ $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$
- ☐ $N > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1$

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées à la correction.

Question 6: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5
☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

Résoudre par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}$ et en fonction de $m \in \mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\left(\frac{4+m}{3-m}\right) x \leq x + 2m + 1, \quad m \neq 3.$$

Question 7: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

Résoudre l'équation suivante par rapport à $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{2x + \sqrt{x+2}}{x - \sqrt{x+2}} = 1.$$

Question 8: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐ 0 ☐ .5 ☐ 1 ☐ .5 ☐ 2 ☐ .5 ☐ 3 ☐ .5 ☐ 4

Pour cette question, écrire seulement la réponse finale dans l'espace prévu.

On note (a_n) et (b_n), $n \in \mathbb{N}^*$, deux suites. Donner un exemple pour chacune des situations suivantes en explicitant les termes généraux a_n et b_n.

(a) (a_n) est bornée et divergente. (1 point)

(b) (a_n) est strictement positive, converge vers 0 et n'est pas monotone. (1 point)

(c) (a_n) n'est pas minorée mais $\lim_{n \to +\infty} |a_n| = +\infty$. (1 point)

(d) (a_n) et (b_n) sont telles que $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} (a_n b_n) = +\infty$. (1 point)

Question 9: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐0 ☐.5 ☐1 ☐.5 ☐2 ☐.5 ☐3 ☐.5 ☐4 ☐.5 ☐5

Soit la suite (A_n) définie de la manière suivante:

$$A_n = 4 + 8 + 12 + 16 + \cdots + 4n = \sum_{k=1}^{n} 4k, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = 2n(n+1)$.

(b) Donner la définition de $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

(c) En utilisant cette définition de la limite, montrer que $\lim_{n\to+\infty} A_n = +\infty$.