Série 24

Exercice 1. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ on donne :

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\to\sin(x),\quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\to\sin(2x),\quad h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\to\cos(x).$$

a. La famille f,g est-elle libre ou liée ? Justifier.

b. Même question qu'au a. mais pour la famille f,g,h.

Exercice 2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, donner une famille génératrice de W, sachant que :

$$W=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-y+z+2t=0 \text{ et } 2x+y-z-t=0\}.$$

On ne demande pas de montrer que W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3. Dans l'espace vectoriel $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ on donne le sous-ensemble :

$$W=\{A\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\mathrm{tr}(A)\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\}$$

a. Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Déterminer une famille génératrice de W.

Exercice 4. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal 3 on donne :

$$W=\{P(X)\in\mathbb{R}_3[X] \mid P(X)=P(1-X)\}.$$

a. Donner quelques exemples d'éléments de W. *Indication : que peut on dire des racines d'un tel polynôme ?*

b. Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

c. Déterminer une famille génératrice de W.

Exercice 5. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_5[X]$ des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal 5 on donne :

$$P(X)=(X-13)^5,\quad Q(X)=(X^2-169)(X+11)^3,\quad R(X)=(X-13)(X+11)^2(X-12)^2.$$

Montrer que la famille P,Q,R est libre.

Exercice 6. Dans l'espace vectoriel $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ on donne :

$$A=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 8 & -2\end{pmatrix}.$$

La famille $I_2,A,\ldots,A^n$ est-elle libre ou liée ? On discutera en fonction de l'entier $n\geqslant 1$.

Exercice 7. On donne $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ et on s'intéresse au *commutant de* A, c'est-à-dire au sous-ensemble :

$$\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}),\ AB = BA\}$$

formé des matrices 3×3 qui commutent à A pour le produit matriciel.

a. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

b. Déterminer une famille génératrice de $\mathcal{C}(A)$ dans le cas où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. libre, b. libre.
Ex. 6 : libre pour $n = 1$, liée pour $n \geqslant 2$.