Série 22

Exercice 1. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (-x - 6y - 6z, 2y + z, z).$$

a. Montrer que le plan vectoriel d'équation $y + z = 0$ est stable par f.

b. Le plan vectoriel d'équation $x + y = 0$ est-il stable par f ?

c. Déterminer tous les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

Exercice 2. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (-9x + 5y - 4z, -14x + 7y - 6z, -2x - z).$$

a. Calculer $f(1, 2, 1)$. En déduire une valeur propre de f.

b. En utilisant le a., trouver l'équation d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qui est stable par f.

c. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$, que l'on calculera, est diagonale par blocs.

Exercice 3. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (-2y + z, x - 3y, -x + y - 3z).$$

a. Calculer sous forme factorisée le polynôme caractéristique de f.

b. L'application f est-elle diagonalisable ? Déterminer tous les vecteurs propres de f.

c. Identifier tous les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f. L'application f est-elle diagonalisable par blocs ?

Exercice 4. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (3x - 4y - 4z, 3x - 5y - 8z, -2x + 4y + 7z).$$

a. Calculer le polynôme caractéristique de f et le factoriser. L'application f est-elle diagonalisable ?

b. Identifier tous les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

c. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ est diagonale par blocs.

Exercice 5. On donne, en fonction des réels α, β et γ, l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (-\alpha y - \beta z, \alpha x - \gamma z, \beta x + \gamma y).$$

a. Calculer sous forme factorisée le polynôme caractéristique de f.

b. A quelle condition sur α, β et γ l'application linéaire f est-elle diagonalisable ?

c. Montrer que f est diagonalisable par blocs.

Exercice 6. On donne une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et un plan vectoriel V de $\mathbb{R}^3$. Montrer que :

$$V \text{ stable par } f \quad \Leftrightarrow \quad \exists \omega \in \mathbb{R}, \operatorname{Im}(f - \omega \operatorname{id}_{\mathbb{R}^3}) \subset V.$$

Éléments de réponse :

Ex. 1 : b. non, c. $z = 0$, $y + z = 0$, $x + 2y + 2z = 0$.
Ex. 2 : a. -3, b. $2x - y + z = 0$.
Ex. 3 : a. $-(2 + X)^3$, b. non, c. non.
Ex. 4 : a. $(3 - X)(X - 1)^2$, non, b. $x - 2y - 2z = 0$, $-x + 2y + 3z = 0$.
Ex. 5 : a.$-X(X^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$, b. $\alpha = \beta = \gamma = 0$.