Série 19

Exercice 1. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (-\tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}z, \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{4}z, \tfrac{3}{4}y + \tfrac{3}{4}z).$$

a. Montrer que f est une projection et décrire les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ de $\mathbb{R}^3$.

b. Quel est l'ensemble $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ formé des éléments de $\mathbb{R}^3$ fixés par f ?

c. Représenter sur un croquis les éléments caractéristiques de f ainsi qu'un point (x, y, z) et son image $f(x, y, z)$ par f.

Exercice 2. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (-\tfrac{1}{4}z, -\tfrac{1}{3}x + y - \tfrac{1}{12}z, z).$$

a. Quelle est la nature géométrique de f ?

b. Déterminer l'application $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - f$. En déduire $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

c. Représenter sur un croquis les éléments caractéristiques de f ainsi qu'un point (x, y, z) et son image $f(x, y, z)$ par f.

Exercice 3. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to \tfrac{1}{2}(x - 2y + 3z)(1, 0, 1).$$

a. Quel est le rang de f ? Donner des équations de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

b. Déterminer l'expression de la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$.

c. Représenter sur un croquis les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ ainsi qu'un point (x, y, z) et son image par f.

Exercice 4. Déterminer l'expression de la projection :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

sur le plan vectoriel d'équation $x - y + 3z = 0$ parallèlement à la droite vectorielle engendrée par $(1, -2, 4)$.

Exercice 5. Donner un exemple de projection $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de rang 2 et qui vérifie :

a. que l'on a l'égalité $f(1, 0, 2) = f(3, -1, 5)$.

b. en plus de la condition du a., que $f(-1, 4, 1) = (-1, 4, 1)$.

c. en plus des conditions du a. et du b., que $f^{-1}(\{(2, 1, 7)\}) \neq \varnothing$.

Exercice 6. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to \tfrac{1}{11}(4x + 20y + 5z, 6x - 3y + 2z, -3x - 4y - 12z).$$

a. Identifier $f \circ f$. L'application f est-elle une projection ?

b. Etudier l'application linéaire $g = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} + f)$.

c. Déterminer la nature géométrique de f ainsi que ses éléments caractéristiques. *Indication : faire un dessin.*

Exercice 7. Montrer que pour toute projection $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on a :

$$\operatorname{tr} f = \operatorname{rg} f.$$

Indication : on pourra discuter selon le rang de f.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((-2, 1, 3))$, $\operatorname{Ker} f : y + z = 0$.
Ex. 2 : a. projection, b. $\operatorname{Im} f : 4x + z = 0$, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((3, 1, 0))$.
Ex. 3 : a. $\operatorname{rg} f = 1$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((1, 0, 1))$, $\operatorname{Ker} f : x - 2y + 3z = 0$.
Ex. 4 : $f(x, y, z) = \frac{1}{15}(14x + y - 3z, 2x + 13y + 6z, -4x + 4y + 3z)$.
Ex. 6 : b. projection, $\operatorname{Im} g : \frac{x}{5} = \frac{y}{2} = -z$, $\operatorname{Ker} g : 3x + 4y + z = 0$.