Série 18

Exercice 1. On donne l'application linéaire f suivante ainsi que la famille $\mathcal{B}$ d'éléments de $\mathbb{R}^3$:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to (2x, 6x-y, -3x+2y+z) \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = (0,0,1), (0,-1,1), (1,2,1).$$

a. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour tout élément $v = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$, écrire la décomposition de v sur $\mathcal{B}$.

b. Déterminer la famille $f(\mathcal{B})$. En déduire les matrices $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_{\text{can}}}$ et $[f]_{\mathcal{B}}$, où on note $\mathcal{B}_{\text{can}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

c. Calculer la matrice $[f]_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}}$.

Exercice 2. On donne l'application linéaire f suivante ainsi que la famille $\mathcal{B}$ d'éléments de $\mathbb{R}^3$:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to (x+y+3z)(1,2,-1) \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = (2,4,-2), (0,1,0), (0,0,1).$$

a. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour tout élément $v = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$, écrire la décomposition de v sur $\mathcal{B}$.

b. Calculer la famille $f(\mathcal{B})$ et la décomposer sur $\mathcal{B}$. En déduire la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ représentant f en base $\mathcal{B}$.

c. Vérifier vos résultats du a. et b. en testant la validité de la formule $[f(v)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}\,[v]_{\mathcal{B}}$.

Exercice 3. Décrire le noyau et l'image de l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to (x-z, y-x, z-y).$$

Dans chacun des cas suivants, déterminer alors si possible des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant la condition donnée.

a. $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b. $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c. $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Indication : on commencera par écrire la décomposition voulue de $f(\mathcal{B})$ dans $\mathcal{B}'$.

Exercice 4. On donne l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathcal{B} = (11,-29,34), (20,31,-57), (-14,-35,61) \\ \mathcal{B}' = (3,-5,1), (2,0,3), (4,7,2). \end{cases}$$

On ne demande pas de vérifier que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$.

a. Quel est le rang de f ? b. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$. c. Donner une (ou des) équation(s) de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 5. Décrire le noyau et l'image de l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to (3x+2y+z, -3x+z, -y-z).$$

Si c'est possible, déterminer alors une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant la condition donnée.

a. La dernière colonne de la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ est nulle.

b. Même condition qu'au a. et, en supplément, la dernière ligne de la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ est nulle.

c. Mêmes conditions qu'au b. et, en supplément, la première colonne de la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. On donne une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ainsi qu'une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. On suppose que f est inversible.

a. Montrer que la famille $f(\mathcal{B})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour tout élément v de $\mathbb{R}^3$, calculer aussi $[f(v)]_{f(\mathcal{B})}$ en fonction de $[v]_{\mathcal{B}}$.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

b. $[f]_{\mathcal{B},f(\mathcal{B})} = I_3$ c. $[f]_{f(\mathcal{B})} = [f]_{\mathcal{B}}$ d. $[f]_{f(\mathcal{B}),\mathcal{B}} = [f \circ f]_{\mathcal{B}}$.

Exercice 7. On considère les applications linéaires $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définies par :

$$f(x,y,z) = (-16x + 8y - 8z, 10x - 5y + 5z, 2x - y + z) \quad \text{et} \quad g(x,y,z) = (-21x + 3y - 13z, 13x - 2y + 8z, 3x + 2z).$$

a. Déterminer les noyaux de f et g.

b. Trouver, si possible, deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [g]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indication : on commencera par écrire les décompositions voulues de $f(\mathcal{B})$ et $g(\mathcal{B})$ dans $\mathcal{B}'$.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. $(z - 3x + y)(0,0,1) + (-y + 2x)(0,-1,1) + x(1,2,1)$, b. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, c. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex. 2 : a. $\frac{x}{2}(2,4,-2) + (y - 2x)(0,1,0) + (z + x)(0,0,1)$, b. $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex. 3 : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1,1,1))$, $\operatorname{Im} f : x + y + z = 0$, a. et b. possible, c. impossible.

Ex. 4 : a. 2, b. $(3,-2,2)$, c. $49x - 78y + 86z = 0$.

Ex. 5 : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1,-3,3))$, $\operatorname{Im} f : x + y + 2z = 0$

Ex. 7 : a. $\operatorname{Ker} f : 2x - y + z = 0$, $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Vect}((2,1,-3))$.