Série 17

Exercice 1. On donne les applications linéaires :

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to (3x+y-z, 2x-5y, y+2z) \quad \text{et} \quad h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to (x+z, y, 4x+3y-z).$$

Dans chaque cas, donner l'expression de $f(x,y,z)$ en fonction de x, y et z, où f est l'application linéaire donnée :

a. $f = 5g$ b. $f = 2g + 3h$ c. $f = g \circ h - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

Exercice 2. Déterminer une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de rang 1 telle que :

$$\mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Vect}((3,1,-4)), \quad \text{où} \quad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to (-9x+3y-6z, 6x-2y+4z, 15x-5y+10z).$$

Indication : on pourra utiliser des décompositions colonnes-lignes.

Exercice 3. On suppose donnée une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions suivantes :

$$f \circ f = 0 \quad \text{et} \quad f(2,3,5) = f(-1,0,3) = (1,2,-1).$$

a. Déterminer le rang de f puis une base de $\mathrm{Im}\, f$.

b. Décrire $\mathrm{Ker}\, f$ par une (ou des) équation(s).

c. Déterminer l'expression de $f(x,y,z)$ en fonction de x, y et z.

Exercice 4. Est-il vrai ou faux de dire que, pour toutes applications linéaires $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on a :

a. $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$?

b. $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}\, g$?

c. $\mathrm{Ker}(f+g) \cap \mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$?

d. $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}\, f \Rightarrow \mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Im}\, f$?

Exercice 5. Etant donné un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, on s'intéresse aux applications linéaires $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ suivantes :

$$f(x,y,z) = (-7x-12y+15z, 11x+16y-25z, 7x+4y-19z) \quad \text{et} \quad g(x,y,z) = (\alpha x-6y-4z, (3\alpha-2)y+\alpha^2 z, x+(\alpha-1)y+2z).$$

a. Quel est le rang de f ?

b. Déterminer le rang de g. On discutera en fonction de la valeur du paramètre réel α.

c. Même question que b. mais pour $f \circ g$.

Exercice 6. On donne l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to (3x+y+7z, 7x+8y+5z, 5x+3y+9z).$$

a. Décrire le noyau et l'image de f.

b. Déterminer le rang de $f \circ f$. *Indication : que peut-on dire de* $\mathrm{Ker}(f \circ f)$ *?*

c. Trouver ensuite, en fonction de l'entier $n \geqslant 3$, le rang de l'application linéaire $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

Exercice 7. On donne deux applications linéaires $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telles que :

$$\operatorname{rg} f = 1, \quad \operatorname{rg} g = 2, \quad \operatorname{Im} f \not\subset \operatorname{Im} g.$$

Montrer alors que $f + g$ est de rang 2 si et seulement si $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$. *Indication : on pourra étudier le noyau de $f + g$.*

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. $(15x+5y-5z, 10x-25y, 5y+10z)$, b. $(9x+2y+z, 4x-7y, 12x+11y+z)$, c. $(-2x-2y+4z, 2x-6y+2z, 8x+7y-3z)$.
Ex. 3 : a. 1, $(1,2,-1)$, b. $7x-5y-3z=0$.
Ex. 4 : a. vrai, b. faux, c. vrai, d. vrai.
Ex. 5 : a. 2, b. 3 si $\alpha \notin \{1,2\}$, 2 sinon, c. 2 si $\alpha \neq 1$, 1 sinon.
Ex. 6 : a. $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((-3,2,1))$, $\operatorname{Im} f : -19x - 4y + 17z = 0$.