Série 15

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$, on donne les éléments suivants :

$$v_1 = (2, -2, 1),\ v_2 = (1, 3, 1),\ v_3 = (-1, 1, -\tfrac{1}{2}),\ v_4 = (-\tfrac{3}{2}, \tfrac{7}{2}, -\tfrac{1}{2}).$$

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la dimension et une base de V :

a. $V = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ b. $V = \mathrm{Vect}(v_1, v_3)$ c. $V = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_4)$.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^3$, on donne la famille $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$, où :

$$v_1 = (2, 1, -1),\ v_2 = (-1, 3, 0),\ v_3 = (1, -1, 2).$$

a. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
b. Ecrire des équations de la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(v_1)$. Même question pour $\mathrm{Vect}(v_2)$.
c. Déterminer une équation du plan vectoriel $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.
d. Etant donné un élément $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, calculer $[v]_{\mathcal{B}}$ et écrire la décomposition de v sur $\mathcal{B}$.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$, on donne les deux familles suivantes :

$$\mathcal{B} = (1, 1, -1), (3, -2, 0) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = (2, -3, 1), (1, -4, 2).$$

a. Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases d'un même plan vectoriel V dont on donnera une équation.
b. On suppose que $v = (x, y, z)$ appartient à V. Décomposer v sur $\mathcal{B}$ et en déduire $[v]_{\mathcal{B}}$.
c. Sous la même hypothèse qu'au b., calculer $[v]_{\mathcal{B}'}$ et donner la décomposition de v correspondante.

Exercice 4. Si c'est possible, déterminer une base $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :
a. $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ est le plan vectoriel d'équation $2x + y + 2z = 0$.
b. Même condition qu'au a. et, en supplément, $\mathrm{Vect}(v_2, v_3)$ contient $(4, 1, 3)$ et $(-6, 5, 2)$.
c. Mêmes conditions qu'au b. et, en supplément :

$$[(0, 0, 1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$[(1, 1, -1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad [(-1, 0, 1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad [(3, 1, -2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ sachant que $(2\alpha^2 - 1, \alpha, 2 - 4\alpha)$ n'est pas combinaison linéaire de la famille :

$$(1, 2, -1),\ (-1, \alpha - 2, \alpha + 1),\ (2\alpha, 4\alpha - 1, -\alpha - 2).$$

Exercice 7. Est-il vrai que, pour tout choix d'éléments v_1, v_2, v_3 de $\mathbb{R}^3$ on a :

a. $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) \cup \mathrm{Vect}(v_2, v_3) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$?

b. si $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$ alors v_1, v_2, v_3 l'est aussi.

c. $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) \cap \mathrm{Vect}(v_1, v_3) = \mathrm{Vect}(v_1)$?

d. si v_1, v_2, v_3 est une base de $\mathbb{R}^3$ alors $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1$ l'est aussi.

Si vous pensez que c'est vrai expliquez pourquoi. Si vous pensez que c'est faux, donnez un contre-exemple.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. $\dim 2$, b. $\dim 1$, c. $\dim 2$.
Ex. 2 : b. $\frac{x}{2} = y = -z$ et $-x = \frac{y}{3}, z = 0$, c. $3x + y + 7z = 0$.
Ex. 3 : a. $2x + 3y + 5z = 0$, b. $\begin{pmatrix} -z \\ \frac{x+z}{3} \end{pmatrix}$, c. $\begin{pmatrix} \frac{2x-z}{3} \\ \frac{-x+2z}{3} \end{pmatrix}$.
Ex. 5 : $\mathcal{B} = (-3, -1, 2), (-2, -1, 1), (2, 1, -2)$.
Ex. 6 : $\alpha = 0$.
Ex. 7 : a. faux, b. vrai, c. faux, d. faux.