Série 14

Exercice 1. Déterminer le rang la matrice A ci-dessous et en écrire une décomposition colonne-ligne minimale :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -14 & 21 & -7 \\ 10 & -15 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. On donne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le déterminant de A. Quel est le rang de A ?

b. Donner une décomposition colonne-ligne minimale de A.

Exercice 3. On donne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le déterminant de A.

b. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer la matrice inverse A^{-1}.

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, déterminer à quelle condition la matrice proposée est inversible et, sous cette condition, calculer l'inverse :

a. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

Exercice 5. On donne, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha + 1 & -1 \\ \alpha^2 - 2\alpha - 1 & \alpha^2 + \alpha + 2 & \alpha - 3 \\ \alpha^2 + 2\alpha - 1 & -1 - 3\alpha & \alpha + 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang de A en fonction de la valeur du paramètre α, ainsi qu'une décomposition colonne-ligne minimale de A.

Exercice 6. Etant donnés $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on donne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le déterminant de A.

b. A quelle condition sur les paramètres α, β, γ la matrice A est-elle inversible ? Calculer alors la matrice inverse.

Exercice 7. On considère un système linéaire 3×3 dont on note A la matrice des coefficients :

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x + \alpha_{1,2}y + \alpha_{1,3}z = a \\ \alpha_{2,1}x + \alpha_{2,2}y + \alpha_{2,3}z = b \\ \alpha_{3,1}x + \alpha_{3,2}y + \alpha_{3,3}z = c \end{cases}$$

a. En supposant que (x, y, z) est solution, calculer les déterminants suivants en fonction de x, y et z :

$$\begin{vmatrix} a & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ b & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ c & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & a & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & b & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & c & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & a \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & b \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & c \end{vmatrix}.$$

b. Sous l'hypothèse que $\det(A) \neq 0$, en déduire une formule générale pour la matrice inverse A^{-1} de A.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : 1, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Ex. 2 : a. 0, 2.
Ex. 3 : a. -1, b. $\left(\begin{smallmatrix} -4 & 13 & -5 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
Ex. 4 : condition $\alpha\beta\gamma \neq 0$ en a., b. et c.
Ex. 5 : rang 1 si $\alpha = 1$, rang 2 si $\alpha = -1$ et rang 3 sinon.
Ex. 6 : a. $\alpha(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)$.