Série 13

Exercice 1. On donne les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 7 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le coefficient en position $(2,1)$ de la matrice proposée :

a. $2A - 3B$ b. AB c. $B^2 + BA$.

Exercice 2. Calculer les déterminants suivants :

a. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 11 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -6 \\ 17 & 5 & -3 \end{vmatrix}$.

Exercice 3. Sachant que $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \rho \\ \lambda & \mu & \sigma \end{vmatrix} = 3$, calculer chacun des déterminants suivants :

a. $\begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & \rho \\ \alpha + 2\lambda & \beta + 2\mu & \gamma + 2\sigma \\ \lambda & \mu & \sigma \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 2\beta & \gamma & \alpha \\ 2\mu & \sigma & \lambda \\ 2\varepsilon & \rho & \delta \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 3(\delta - \varepsilon) & 3\rho & \varepsilon \\ \alpha - \beta & \gamma & \frac{1}{3}\beta \\ \lambda - \mu & \sigma & \frac{1}{3}\mu \end{vmatrix}$.

Exercice 4. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 11 & 12 & 13 \\ 113 & 125 & 138 \end{vmatrix}.$$

Exercice 5. Calculer les déterminants suivants :

a. $\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} \beta & \gamma & \alpha \\ \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 6. Etant donnés $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, calculer sous forme factorisée le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(\alpha) & \cos(\beta) & \cos(\gamma) \\ \cos(2\alpha) & \cos(2\beta) & \cos(2\gamma) \end{vmatrix}.$$

Indication : on pourra utiliser une formule de trigonométrie.

Exercice 7. Etant donnés $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta + \gamma = 0 \text{ ou } \alpha = \beta = \gamma.$$

Indication : que vaut la somme des lignes dans le déterminant étudié ?

Exercice 8. Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ on a l'égalité :

$$\det(A) = \det({}^tA).$$

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. 1, b. 49, c. 14.
Ex. 2 : a. 60, b. 0, c. 8.
Ex. 3 : a. -3, b. -6, c. 3.
Ex. 4 : -100.
Ex. 5 : a. $\alpha\beta\gamma$, b. $-\alpha\beta\gamma$, c. 0.
Ex. 6 : $2(\cos(\beta) - \cos(\alpha))(\cos(\gamma) - \cos(\alpha))(\cos(\gamma) - \cos(\beta))$.