Série 24

Exercice 1. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ on donne :

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\to\sin(x),\quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\to\sin(2x),\quad h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\to\cos(x).$$

a. La famille f, g est-elle libre ou liée ? Justifier.

b. Même question qu'au a. mais pour la famille f, g, h.

Solution:

a. La famille proposée est libre. Pour voir cela, donnons-nous une relation de dépendance linéaire entre f et g, c'est-à-dire une égalité du type :

$$\alpha f+\beta g=0.$$

Il s'agit d'une égalité entre fonctions (la fonction de droite étant la fonction constante nulle). Or deux fonctions sont égales si et seulement si elles prennent la même valeur en tout point :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\alpha f(x)+\beta g(x)}_{\alpha\sin(x)+\beta\sin(2x)}=0.$$

En particulier, pour $x=\frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\underbrace{\alpha\sin(\tfrac{\pi}{2})+\beta\sin(\pi)}_{\alpha}=0,$$

autrement dit, α est nul. En injectant cette valeur dans l'égalité ci-dessus on obtient maintenant que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \beta\sin(2x)=0.$$

En évaluant par exemple en $x=\frac{\pi}{4}$ on trouve alors :

$$\underbrace{\beta\sin(\tfrac{\pi}{2})}_{\beta}=0.$$

Autrement dit, β est nul. On a donc montré que la seule relation de dépendance linéaire entre f et g est la relation triviale : la famille f, g est donc libre.

b. La famille f, g, h est également libre. En effet, considérons une relation de dépendance linéaire entre ces fonctions, c'est-à-dire une égalité du type :

$$\alpha f+\beta g+\gamma h=0.$$

Il s'agit d'une égalité entre fonctions (la fonction de droite étant la fonction constante nulle). Or deux fonctions sont égales si et seulement si elles prennent la même valeur en tout point :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\alpha f(x)+\beta g(x)+\gamma h(x)}_{\alpha\sin(x)+\beta\sin(2x)+\gamma\cos(x)}=0.$$

En particulier, pour $x=\pi$, on obtient :

$$\underbrace{\alpha\sin(\pi)+\beta\sin(2\pi)}_{0}+\underbrace{\gamma\cos(\pi)}_{-\gamma}=0,$$

autrement dit, γ est nul. En injectant cette valeur dans l'égalité ci-dessus on obtient maintenant que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \alpha\sin(x)+\beta\sin(2x)=0.$$

Or on a vu au a. que sous cette hypothèse α et β sont nuls. On a donc montré que la seule relation de dépendance linéaire entre f, g et h est la relation triviale : la famille f, g, h est donc libre.

Remarque : il existe bel et bien une "relation" entre les fonctions f, g et h, à savoir :

$$g = 2fh$$

puisqu'on sait du cours de trigonométrie que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

Le problème ici est que cette relation sort du cadre "linéaire", puisque pour l'écrire on utilise la multiplication entre fonctions, qui ne fait pas partie de la structure vectorielle de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, donner une famille génératrice de W, sachant que :

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y + z + 2t = 0 \;\text{ et }\; 2x + y - z - t = 0\}.$$

On ne demande pas de montrer que W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Solution: Pour trouver une famille génératrice de W, cherchons la "forme générale" de ses éléments :

$$\underbrace{(x, y, z, t)}_{v} \in W \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y + z + 2t = 0 \\ 2x + y - z - t = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = y - z - 2t \\ 3y - 3z - 5t = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z \\ t = \frac{3}{5}y - \frac{3}{5}z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$$

$$\cdots \quad v = \underbrace{(-\tfrac{1}{5}y + \tfrac{1}{5}z, y, z, \tfrac{3}{5}y - \tfrac{3}{5}z)}_{y(-\frac{1}{5},1,0,\frac{3}{5})+z(\frac{1}{5},0,1,-\frac{3}{5})} \quad \Leftrightarrow \quad v \in \mathrm{Vect}((-\tfrac{1}{5}, 1, 0, \tfrac{3}{5}), (\tfrac{1}{5}, 0, 1, -\tfrac{3}{5})).$$

On voit donc que la famille suivante est génératrice de W :

$$(-\tfrac{1}{5}, 1, 0, \tfrac{3}{5}), (\tfrac{1}{5}, 0, 1, -\tfrac{3}{5}).$$

Remarque : une autre méthode de résolution du système peut évidemment mener à une autre forme générale, et donc à une autre famille génératrice de W. Par exemple :

$$\underbrace{(x, y, z, t)}_{v} \in W \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y + z + 2t = 0 \\ 2x + y - z - t = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y + z + 2t = 0 \\ 3x + t = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -5x + z \\ t = -3x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$$

$$\cdots \quad v = \underbrace{(x, -5x + z, z, -3x)}_{x(1,-5,0,-3)+z(0,1,1,0)} \quad \Leftrightarrow \quad v \in \mathrm{Vect}((1, -5, 0, -3), (0, 1, 1, 0))$$

montre que la famille suivante est génératrice de W :

$$(1, -5, 0, -3), (0, 1, 1, 0).$$

Exercice 3. Dans l'espace vectoriel $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ on donne le sous-ensemble :

$$W = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \,|\, A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{tr}(A) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$

a. Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Déterminer une famille génératrice de W.

Solution:

a. Commençons par observer que la matrice nulle appartient à W, car :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\mathrm{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{0} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donnons-nous ensuite deux matrices A et B de taille 2×2 ainsi qu'un réel λ, et posons :

$$C = \lambda A + B.$$

Supposons alors que A et B appartiennent à W, c'est-à-dire que :

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \operatorname{tr}(A)\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \operatorname{tr}(B)\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}.$$

On trouve alors :

$$C\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = (\lambda A + B)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \lambda A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \lambda \operatorname{tr}(A)\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \operatorname{tr}(B)\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = (\lambda \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B))\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \operatorname{tr}(C)\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}.$$

Autrement dit, C appartient aussi à W.

b. Pour trouver une famille génératrice de W, cherchons la "forme générale" de ses éléments :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}}_{A} \in W \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \underbrace{(\alpha+\delta)}_{\operatorname{tr}(A)}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}\alpha+\beta = 3\alpha+3\delta\\ \gamma+\delta = 2\alpha+2\delta\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \begin{cases}\beta = 2\alpha+3\delta\\ \gamma = 2\alpha+\delta.\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & 2\alpha+3\delta\\ 2\alpha+\delta & \delta\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A = \alpha\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

On voit donc que la famille :

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

est génératrice de W.

Exercice 4. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal 3 on donne :

$$W = \{P(X) \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X) = P(1-X)\}.$$

a. Donner quelques exemples d'éléments de W. *Indication : que peut on dire des racines d'un tel polynôme ?*

b. Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

c. Déterminer une famille génératrice de W.

Solution:

a. Le sous-ensemble W contient par exemple tous les polynômes constants :

$$P(X) = c.$$

En effet, un tel polynôme prend partout la même valeur, et donc a fortiori en X et en $1-X$:

$$P(1-X) = c = P(X).$$

Une autre idée pour produire des exemples d'éléments de W peut être de s'intéresser aux racines d'un tel polynôme $P(X)$, puisque la condition définissant W montre que :

$$P(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad P(1-\alpha) = 0.$$

Autrement dit, si α est racine alors $1-\alpha$ l'est aussi. Avec $\alpha = 0$, on est amené à considérer par exemple le polynôme :

$$P(X) = X(X-1)$$

qui convient effectivement :

$$P(1-X) = (1-X)(1-(1-X)) = (1-X)X = P(X).$$

b. D'après ce qu'on a dit au a., il est clair que le polynôme nul appartient à W. Donnons-nous ensuite deux polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$, un réel λ et posons :

$$R(X) = \lambda P(X) + Q(X).$$

Supposons alors que $P(X)$ et $Q(X)$ appartiennent à W, c'est-à-dire que :

$$P(1-X) = P(X) \quad \text{et} \quad Q(1-X) = Q(X).$$

On obtient alors :

$$R(1-X) = \lambda P(1-X) + Q(1-X) = \lambda P(X) + Q(X) = R(X).$$

Autrement dit, $R(X)$ appartient à W.

c. Pour trouver une famille génératrice de W, cherchons la "forme générale" de ses éléments. Pour cela, donnons-nous un $P(X)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$:

$$P(X) = \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta.$$

Il appartient à W si et seulement si :

$$\underbrace{\alpha(1-X)^3 + \beta(1-X)^2 + \gamma(1-X) + \delta}_{P(1-X)} = \underbrace{\alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta}_{P(X)}.$$

En regardant les coefficients dominants (c'est-à-dire ceux de X^3) de ces deux polynômes on trouve $-\alpha$ pour celui de gauche et α pour celui de droite. Ceci prouve que $\alpha = 0$. On en déduit donc l'égalité :

$$\underbrace{\beta(1-X)^2 + \gamma(1-X) + \delta}_{\beta X^2 - (2\beta+\gamma)X + \beta+\gamma+\delta} = \beta X^2 + \gamma X + \delta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2\beta - \gamma = \gamma \\ \beta + \gamma + \delta = \delta \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = -\beta.$$

Autrement dit, notre $P(X)$ appartient à W si et seulement s'il s'écrit sous la forme :

$$P(X) = \beta X^2 - \beta X + \delta = \beta(X^2 - X) + \delta.$$

On voit donc que la famille :

$$X^2 - X, 1$$

est génératrice de W.

Exercice 5. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_5[X]$ des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal 5 on donne :

$$P(X) = (X-13)^5, \quad Q(X) = (X^2 - 169)(X+11)^3, \quad R(X) = (X-13)(X+11)^2(X-12)^2.$$

Montrer que la famille P, Q, R est libre.

Solution: Pour montrer que la famille P, Q, R est libre, donnons-nous une relation de dépendance linéaire entre ces polynômes :

$$\alpha \underbrace{(X-13)^5}_{P} + \beta \underbrace{(X^2-169)(X+11)^3}_{Q} + \gamma \underbrace{(X-13)(X+11)^2(X-12)^2}_{R} = 0.$$

En évaluant en $X = -11$, on trouve alors que :

$$\alpha P(-11) = 0,$$

ce qui montre que $\alpha = 0$, car :

$$P(-11) = (-25)^5 \neq 0.$$

La relation ci-dessus devient donc :

$$\beta(X^2 - 169)(X+11)^3 + \gamma(X-13)(X+11)^2(X-12)^2 = 0.$$

En évaluant à présent en $X = 12$, on trouve que :

$$\beta Q(12) = 0$$

ce qui montre que $\beta = 0$, car :

$$Q(12) = (12^2 - 169)(12+11)^3 \neq 0.$$

On a donc :

$$\gamma(X-13)(X+11)(X-12) = 0,$$

ce qui force $\gamma = 0$. On a donc bien montré que la seule relation de dépendance linéaire entre P, Q et R est la relation triviale : cette famille est bien libre.

Exercice 6. Dans l'espace vectoriel $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ on donne :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

La famille $I_2, A, \ldots, A^n$ est-elle libre ou liée ? On discutera en fonction de l'entier $n \geqslant 1$.

Solution: Commençons par le cas où $n = 1$. Il s'agit de décider si la famille :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}}_{A}$$

est libre ou liée. Or ces deux matrices ne sont pas proportionnelles : la famille étudiée est libre. Passons au cas $n = 2$. Par un calcul direct, on obtient :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -3 \\ 24 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, il s'agit donc de décider si la famille :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}}_{A}, \underbrace{\begin{pmatrix} 17 & -3 \\ 24 & -4 \end{pmatrix}}_{A^2}$$

est libre ou liée. Or, en cherchant à combiner I_2 et A pour créer A^2 on peut trouver la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} 17 & -3 \\ 24 & -4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A^2 = 3A + 2I_2$$

(qui n'est en fait qu'un cas particulier du thérème de Cayley-Hamilton, puisque A est de trace 3 et de déterminant -2). Si cette relation ne nous saute pas aux yeux, on peut aussi poser a priori une relation de dépendance linéaire entre I_2, A et A^2 :

$$\alpha I_2 + \beta A + \gamma A^2 = 0$$

et chercher à identifier les coefficients. On trouve alors :

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 17 & -3 \\ 24 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 5\beta + 17\gamma & -\beta - 3\gamma \\ 8\beta + 24\gamma & \alpha - 2\beta - 4\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où l'on déduit que :

$$\beta = -3\gamma \text{ et } \quad \alpha = -2\gamma.$$

Autrement dit, la relation initiale prend la forme :

$$\alpha I_2 + \beta A + \gamma A^2 = \gamma(-2I_2 - 3A + A^2) = 0.$$

On retrouve donc la relation devinée ci-dessus et on a même montré plus : toute relation entre I_2, A et A^2 est proportionnelle à celle-ci. Pour $n = 2$ on a donc trouvé une relation non triviale entre I_2, A et A^2 : cette famille est liée. Pour $n \geqslant 3$ la famille proposée est encore liée (en ajoutant des éléments à une famille liée elle reste liée). On a par exemple la relation non triviale :

$$-2I_2 - 3A + A^2 + 0A^3 + \cdots + 0A^n = 0.$$

Exercice 7. On donne $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ et on s'intéresse au *commutant de* A, c'est-à-dire au sous-ensemble :

$$\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}),\ AB = BA\}$$

formé des matrices 3×3 qui commutent à A pour le produit matriciel.

a. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

b. Déterminer une famille génératrice de $\mathcal{C}(A)$ dans le cas où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution:

a. Il est clair que la matrice nulle commute à A : elle appartient donc à $\mathcal{C}(A)$. Ensuite, donnons-nous deux matrices B et C de taille 2×2 qu'un réel λ et posons :

$$D = \lambda B + C.$$

Supposons alors que B et C appartiennent à $\mathcal{C}(A)$, c'est-à-dire que ces deux matrices commutent à A :

$$AB = BA \quad \text{et} \quad AC = CA.$$

On a alors :

$$AD = A(\lambda B + C) = \lambda AB + AC = \lambda BA + \lambda CA = (\lambda B + C)A = DA,$$

si bien que D appartient aussi à $\mathcal{C}(A)$.

b. Pour trouver une famille génératrice de $\mathcal{C}(A)$, cherchons la "forme générale" de ses éléments :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix}}_{B} \in \mathcal{C}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix}}_{AB} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{BA}.$$

Par un calcul direct, on voit que la dernière égalité est équivalente à demander que :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} + \alpha_{2,1} & \alpha_{1,2} + \alpha_{2,2} & \alpha_{1,3} + \alpha_{2,3} \\ \alpha_{2,1} + \alpha_{3,1} & \alpha_{2,2} + \alpha_{3,2} & \alpha_{2,3} + \alpha_{3,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,1} + \alpha_{1,2} & \alpha_{1,2} + \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,1} + \alpha_{2,2} & \alpha_{2,2} + \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,1} + \alpha_{3,2} & \alpha_{3,2} + \alpha_{3,3} \end{pmatrix}.$$

En calculant la différence de ces deux matrices on obtient maintenant :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} - \alpha_{1,1} & \alpha_{2,3} - \alpha_{1,2} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} - \alpha_{2,1} & \alpha_{3,3} - \alpha_{2,2} \\ 0 & -\alpha_{3,1} & -\alpha_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis, finalement :

$$\begin{cases} \alpha_{2,1} = \alpha_{3,1} = \alpha_{3,2} = 0 \\ \alpha_{1,1} = \alpha_{2,2} = \alpha_{3,3} \\ \alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ 0 & \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ 0 & 0 & \alpha_{1,1} \end{pmatrix} = \alpha_{1,1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_{1,2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{1,3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit donc que la famille :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est génératrice de $\mathcal{C}(A)$.