Série 23

Exercice 1. Dans l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$ des matrices 2×2 à coefficients réels, on donne le sous-ensemble :

$$W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ matrice diagonale}\}.$$

a. Donner quelques éléments de W et aussi quelques exemples de matrices 2×2 n'appartenant pas à W.

b. Montrer que W est stable par multiplication scalaire.

c. Est-il stable par addition ? Est-ce que W est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$?

Solution:

a. Par définition, une matrice 2×2 est diagonale si ses coefficients hors diagonaux sont nuls. Voici quelques exemples :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix} \dots$$

Une matrice 2×2 n'est pas diagonale si (au moins) l'un de ses coefficients hors diagonaux est non nul. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & \frac{1}{2} \\ 7 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} & e \\ \frac{1}{\cos(1)} & \pi \end{pmatrix} \dots$$

b. Pour vérifier que W est stable par mutliplication scalaire, donnons-nous une matrice A de taille 2×2, un réel λ et posons :

$$B = \lambda A.$$

Supposons alors que A appartient à W, c'est-à-dire que A est une matrice diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

On obtient alors, par définition de la multiplication scalaire sur les matrices :

$$B = \lambda A = \lambda \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha & 0 \\ 0 & \lambda\beta \end{pmatrix}.$$

La matrice B est donc diagonale. Autrement dit, elle appartient à W.

c. Le sous-ensemble W est bien stable par addition. Pour le montrer, donnons-nous deux matrices A et B de taille 2×2 et posons :

$$C = A + B.$$

Supposons alors que A et B appartiennent à W, c'est-à-dire que A et B sont des matrices diagonales :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

On obtient alors, par définition de l'addition sur les matrices :

$$C = A + B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\gamma & 0 \\ 0 & \beta+\delta \end{pmatrix}.$$

La matrice C est donc diagonale. Autrement dit, elle appartient à W. On peut donc finalement conclure que W est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$: il contient la matrice nulle (d'après a.), est stable par multiplication scalaire (d'après b.) et aussi par addition (d'après c.).

Exercice 2. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$, on donne le sous-ensemble :

$$W = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}\}.$$

Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solution: Rappelons pour commencer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite 2π-périodique si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

La fonction nulle appartient donc bien à W : elle vaut zéro partout, et a donc la même valeur en x et en $x + 2\pi$ (de même que toute fonction constante). Donnons-nous ensuite deux fonctions numériques f et g définies sur $\mathbb{R}$, un réel λ et posons :

$$h = \lambda f + g.$$

Supposons alors que f et g appartiennent à W, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + 2\pi) = f(x) \text{ et } g(x + 2\pi) = g(x).$$

Par définition de la multiplication scalaire et de l'addition sur les fonctions, on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x + 2\pi) = (\lambda f + g)(x + 2\pi) = \lambda f(x + 2\pi) + g(x + 2\pi) = \lambda f(x) + g(x) = h(x),$$

ce qui montre que h appartient aussi à W.

Remarque : on pourrait bien sûr établir indépendamment la stabilité de W par multiplication scalaire et par addition.

Exercice 3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3 on donne :

$$W = \{P(X) \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(-1) = 0 \text{ et } P(2) = 0\}.$$

a. Donner des exemples d'éléments de $\mathbb{R}_3[X]$ appartenant à W et d'autres n'appartenant pas à W.
b. W est-il stable par multiplication scalaire ? par addition ?
c. En conclusion, dire si W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ ou non.

Solution:

a. On sait qu'un polynôme s'annule en -1 et 2 si et seulement si il est divisible par le polynôme :

$$(X + 1)(X - 2) = X^2 - X - 2.$$

Voici donc quelques exemples d'éléments de W :

$$0_{\mathbb{R}_3[X]},\ X^2 - X - 2,\ 3X^2 - 3X - 6,\ \underbrace{X(X^2 - X - 2)}_{X^3 - X^2 - 2X},\ \underbrace{(2X - 1)(X^2 - X - 2)}_{2X^3 - 3X^2 - 3X + 2} \dots$$

Voici également quelques exemples de polynômes de degré inférieur ou égal à 3 n'appartenant pas à W :

$$\underbrace{1,\ X,\ X^2 - X,\ X + X^3}_{\text{ne s'annulent ni en } -1 \text{ ni en } 2},\ \underbrace{X + 1,\ X^2 - 1,\ X^3 - X^2 - 2}_{\text{s'annulent en } -1 \text{ mais pas en } 2},\ \underbrace{X - 2,\ X^2 - 4,\ X^3 - 2X^2}_{\text{s'annulent en } 2 \text{ mais pas en } -1} \dots$$

b. Le sous-ensemble W est bien stable par multiplication scalaire. Pour le montrer, donnons-nous un polynôme P de degré inférieur ou égal à 3, un réel λ et posons :

$$Q = \lambda P.$$

Supposons alors que P appartient à W, c'est-à-dire que :

$$P(-1) = 0 \text{ et } P(2) = 0.$$

Par définition de la multiplication scalaire sur les polynômes, on a alors :

$$Q(-1) = \lambda P(-1) = 0 \text{ et } Q(2) = \lambda P(2) = 0.$$

Le polynôme Q s'annule en -1 et en 2 : il appartient donc à W. Montrons à présent que W est aussi stable par addition. Pour cela, donnons-nous deux polynômes P et Q de degré inférieur ou égal à 3 et posons :

$$R = P + Q.$$

Supposons alors que P et Q appartiennent à W, c'est-à-dire que :

$$P(-1) = Q(-1) = 0 \text{ et } P(2) = Q(2) = 0.$$

Par définition de l'addition sur les polynômes, on a alors :

$$R(-1) = P(-1) + Q(-1) = 0 \text{ et } R(2) = P(2) + Q(2) = 0.$$

Le polynôme R s'annule en -1 et en 2 : il appartient donc à W.

c. En résumé, on a donc vu que W contient le polynôme nul (d'après a.), est stable par multiplication scalaire et aussi par addition (d'après b.). C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 4. Mêmes questions a., b. et c. qu'à l'exercice précédent mais avec le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$W = \{P(X) \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(-1) = 0 \text{ ou } P(2) = 0\}.$$

Solution:

a. Le sous-ensemble W étudié ici contient celui de l'exercice précédent, mais il ne lui est pas égal. Voici quelques exemples d'éléments de W :

$$\underbrace{0_{\mathbb{R}_3[X]},\ X^2 - X - 2,\ X^3 - X^2 - 2X}_{\text{s'annulent en } -1 \text{ et } 2},\ \underbrace{X + 1,\ X^2 - 1,\ X^3 - X^2 - 2}_{\text{s'annulent en } -1 \text{ mais pas en } 2},\ \underbrace{X - 2,\ X^2 - 4,\ X^3 - 2X^2}_{\text{s'annulent en } 2 \text{ mais pas en } -1} \dots$$

Voici également quelques exemples de polynômes de degré inférieur ou égal à 3 n'appartenant pas à W, c'est-à-dire qui ne s'annulent ni en -1 ni en 2 :

$$1,\ X,\ X^2 - X,\ X + X^3 \dots$$

b. Le sous-ensemble W est bien stable par multiplication scalaire. Pour le montrer, donnons-nous un polynôme P de degré inférieur ou égal à 3, un réel λ et posons :

$$Q = \lambda P.$$

Supposons alors que P appartient à W, c'est-à-dire que :

$$P(-1) = 0 \text{ ou } P(2) = 0.$$

Par définition de la multiplication scalaire sur les polynômes, on a alors :

$$Q(-1) = \lambda P(-1) = 0 \text{ ou } Q(2) = \lambda P(2) = 0.$$

Le polynôme Q s'annule en -1 ou en 2 : il appartient donc à W. Par contre, le sous-ensemble considéré ici n'est pas stable par addition. Pour voir cela, considérons par exemple les deux polynômes suivants :

$$P(X) = X + 1 \text{ et } Q(X) = X + 2.$$

Le premier s'annule en -1 : il appartient donc à W. Le deuxième s'annule en 2 : il appartient donc à W. Cependant, leur somme :

$$(P + Q)(X) = P(X) + Q(X) = (X - 1) + (X + 2) = 2X + 1$$

ne s'annule ni en 1 ni en -2, si bien qu'elle n'appartient pas à W. En additionnant deux éléments de W on est donc "sortis" de W : ce sous-ensemble n'est pas stable par addition.

Exercice 5. Montrer que le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ formé des n-uplets solutions du système linéaire (à coefficients réels) suivant :

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1,n}x_n = 0 \\ \qquad\cdots \\ \alpha_{p,1}x_1 + \cdots + \alpha_{p,n}x_n = 0 \end{cases}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Qu'en est-il si le second membre n'est pas nul ?

Solution: Appelons S l'ensemble des solutions de ce système. Observons tout d'abord que l'élément nul de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire :

$$0_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0)$$

appartient à S. Il est en effet solution du système, du fait que le second membre est nul. Cela permet d'ailleurs de répondre à la deuxième question posée dans l'exercice : si le second membre du système n'est pas nul, alors S n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (puisqu'il n'en contient pas l'élément nul) Donnons-nous maintenant deux solutions $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ du système, c'est-à-dire deux éléments de S :

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \dots + \alpha_{1,n}x_n = 0 \\ \quad\dots \\ \alpha_{p,1}x_1 + \dots + \alpha_{p,n}x_n = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha_{1,1}y_1 + \dots + \alpha_{1,n}y_n = 0 \\ \quad\dots \\ \alpha_{p,1}y_1 + \dots + \alpha_{p,n}y_n = 0. \end{cases}$$

Pour tout réel λ, on observe alors que :

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_n + y_n)$$

est aussi solution, car :

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}(\lambda x_1 + y_1) + \dots + \alpha_{1,n}(\lambda x_n + y_n) = \lambda(\alpha_{1,1}x_1 + \quad \dots + \alpha_{1,n}x_n) + (\alpha_{1,1}y_1 + \dots + \alpha_{1,n}y_n) = 0 \\ \quad\dots \\ \alpha_{p,1}(\lambda x_1 + y_1) + \dots + \alpha_{p,n}(\lambda x_n + y_n) = \lambda(\alpha_{p,1}x_1 + \quad \dots + \alpha_{p,n}x_n) + (\alpha_{p,1}y_1 + \dots + \alpha_{p,n}y_n) = 0. \end{cases}$$

On peut donc maintenant affirmer que S est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Remarque : les sous-ensembles S étudiés ici généralisent les droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ (cas d'une équation à deux variables), les droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ (cas de deux équations à trois variables) et les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (cas d'une équation à trois variables).

Exercice 6. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$, on donne le sous-ensemble :

$$W = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \sin \circ f = 0\}.$$

a. Donner quelques exemples de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ appartenant à W.
b. Montrer que W est stable par addition.
c. Est-il stable par multiplication scalaire ? Est-ce que W est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Solution:

a. Une fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ appartient à W si et seulement si la composée $\sin \circ f$ est l'application nulle, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\sin \circ f)(x) = \sin(f(x)) = 0.$$

Autrement dit, si et seulement si la fonction f est à valeur dans l'ensemble $\pi\mathbb{Z}$ des multiples entiers de π :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists k_x \in \mathbb{Z}, \quad f(x) = k_x \pi$$

(attention : l'entier k_x peut dépendre de la valeur de x). Par exemple, la fonction constante nulle appartient à W, tout comme, plus généralement, la fonction constante :

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to k\pi$$

pour tout choix d'entier k. Comme il n'y a ici aucune exigence de continuité, on peut imaginer de nombreux autres exemples de telles fonctions, comme :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \, x \to \begin{cases} \pi \text{ si } x < 0 \\ -5\pi \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Tout ce qui compte, c'est qu'à chaque fois qu'on évalue f on tombe sur un multiple entier de π.

b. Donnons-nous deux fonctions numériques f et g définies sur $\mathbb{R}$ et posons :

$$h = f + g.$$

Supposons alors que f et g appartiennent à W. Soit aussi $x \in \mathbb{R}$. D'après ce qu'on a compris au a., il existe deux entiers relatifs k et l tels que :

$$f(x) = k\pi \text{ et } g(x) = l\pi.$$

Par définition de l'addition sur les fonctions numériques on obtient alors :

$$h(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = k\pi + l\pi = (k+l)\pi.$$

Autrement dit, h est à valeur dans $\pi\mathbb{Z}$, ce qui nous permet de conclure que h appartient également à W.

Remarque : on pourrait aussi utiliser la formule d'addition pour le sinus, vue au cours de trigonométrie. En effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(h(x)) = \sin(f(x) + g(x)) = \underbrace{\sin(f(x))}_{=0} \cos(g(x)) + \cos(f(x)) \underbrace{\sin(g(x))}_{=0} = 0.$$

c. Le sous-ensemble W n'est pas stable par multiplication scalaire. Pour voir cela, considérons par exemple la fonction constante égale à π définie sur $\mathbb{R}$:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to \pi.$$

Comme on a vu au a. cette fonction appartient à W. Par contre, la fonction :

$$\tfrac{1}{\pi} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to 1,$$

c'est-à-dire la fonction constante égale à 1, n'appartient pas à W puisqu'elle n'est pas à valeur dans $\pi\mathbb{Z}$. En multipliant l'élément f de W par le scalaire $\lambda = \frac{1}{\pi}$ on est donc "sortis" de W : W n'est pas stable par multiplication scalaire (et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

Exercice 7. Même questions a., b. et c. qu'à l'exercice 1 mais avec le sous-ensemble :

$$W = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ matrice diagonalisable}\}.$$

Solution:

a. Toute matrice diagonale est a fortiori diagonalisable. Mais l'ensemble W considéré ici est "plus gros" que l'ensemble considéré à l'exercice 1. Par exemple, les matrices suivantes sont diagonalisables mais non diagonales :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}}_{\text{matrices de projection}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}}_{\text{matrices de symétrie}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ \sqrt{3} & \pi \end{pmatrix}}_{\text{triangulaires avec 2 valeurs propres distinctes}} \quad \cdots$$

Voici aussi quelques exemples de matrices 2×2 non diagonalisables :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{matrices de rotation}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}}_{\text{matrices non nulle dont la seule valeur propre est 0}} \quad \cdots$$

b. Pour vérifier que W est stable par mutliplication scalaire, donnons-nous une matrice A de taille 2×2, un réel λ et posons :

$$B = \lambda A.$$

Supposons alors que A appartient à W, c'est-à-dire que A est une matrice diagonalisable. On peut donc écrire :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

pour une certaine matrice inversible P de taille 2×2. On en déduit alors :

$$P^{-1}BP = P^{-1}(\lambda A)P = \lambda P^{-1}AP = \lambda \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha & 0 \\ 0 & \lambda\beta \end{pmatrix}.$$

La matrice B est donc diagonalisable. Autrement dit, elle appartient à W.

c. L'ensemble W n'est pas stable par addition (et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de V). Pour voir cela, considérons par exemple les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A a deux valeurs propres distinctes, à savoir 1 et -1. On sait donc qu'elle est diagonalisable. La matrice B est quant à elle diagonale (et donc diagonalisable). On voit donc que A et B sont éléments de W. Or en les additionnant on obtient la matrice :

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas diagonalisable (elle possède pour unique valeur propre 0 et est différente de la matrice nulle). En additionnant deux éléments de W on est donc "sortis" de W : ce sous-ensemble n'est pas stable par addition.