Série 22

Exercice 1. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (-x - 6y - 6z, 2y + z, z).$$

a. Montrer que le plan vectoriel d'équation $y + z = 0$ est stable par f.

b. Le plan vectoriel d'équation $x + y = 0$ est-il stable par f ?

c. Déterminer tous les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

Solution: Notons :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice de f en base canonique.

a. On donne deux méthodes pour résoudre cette question. La première consiste à revenir à la définition. Pour cela, donnons-nous un élément v du plan vectoriel d'équation $y + z = 0$:

$$v = (x, y, z) = \underbrace{(x, y, -y)}_{\text{car } y+z=0}$$

et montrons que $f(v)$ vérifie encore cette équation. On trouve :

$$f(v) = f(x, y, -y) = (-x - 6y + 6y, 2y - y, -y) = \underbrace{(-x, y, -y)}_{\text{vérifie bien } y+z=0}.$$

Dans la deuxième méthode, utilisons la caractérisation des équations de plans stables vue au cours, à savoir : une équation définit un plan stable par f si et seulement si les coefficients qui la constituent (une fois mis en colonne) forment un vecteur propre de la matrice ${}^tA$. Or on peut observer ici que :

$${}^tA \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b. Le plan vectoriel d'équation $x + y = 0$ n'est pas stable par f, comme on peut le voir en mettant en défaut la définition. Par exemple, le triplet $(0, 0, 1)$ appartient à ce plan, mais pas son image par f :

$$f(0, 0, 1) = \underbrace{(-6, 1, 1)}_{\text{ne vérifie pas } x+y=0}.$$

Une autre option serait ici de constater que :

$${}^tA \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ n'est pas proportionnel à } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

.

c. Le polynôme caractéristique de f vaut :

$$\det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -1 - X & -6 & -6 \\ 0 & 2 - X & 1 \\ 0 & 0 & 1 - X \end{vmatrix} = (-1 - X)(2 - X)(1 - X).$$

La matrice A possède donc trois valeurs propres, à savoir $-1, 1$ et 2. On sait alors qu'il en est de même de sa transposée :

$${}^tA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ecrivons ensuite les matrices :

$$^tA + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad ^tA - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad ^tA - 2I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On sait par avance que chacune d'elle est de rang 2 si bien qu'à chacune des valeurs propres il va correspondre exactement un plan stable. On trouve alors :

$$^tA \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ -6a + 3b = 0 \\ -6a + b + 2c = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 2a \\ c = 2a \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Le plan vectoriel d'équation $x + 2y + 2z = 0$ est donc stable par f. De plus :

$$^tA \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2a = 0 \\ -6a + b = 0 \\ -6a + b = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le plan vectoriel d'équation $z = 0$ est donc stable par f. Enfin :

$$^tA \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3a = 0 \\ -6a = 0 \\ -6a + b - c = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On retrouve ici le plan étudié au a., c'est-à-dire celui d'équation $y + z = 0$.

Exercice 2. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (-9x + 5y - 4z, -14x + 7y - 6z, -2x - z).$$

a. Calculer $f(1, 2, 1)$. En déduire une valeur propre de f.

b. En utilisant le a., trouver l'équation d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qui est stable par f.

c. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$, que l'on calculera, est diagonale par blocs.

Solution: Notons :

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 5 & -4 \\ -14 & 7 & -6 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la matrice de f en base canonique.

a. Un calcul direct donne :

$$f(1, 2, 1) = (-9 + 10 - 4, -14 + 14 - 6, -2 - 1) = (-3, -6, -3) = -3(1, 2, 1).$$

On peut en déduire que -3 est une valeur propre de f.

b. D'après le a. on sait que -3 est valeur propre de la matrice A, et donc aussi de sa transposée :

$$^tA = \begin{pmatrix} -9 & -14 & -2 \\ 5 & 7 & 0 \\ -4 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ecrivons la matrice :

$$^tA + 3I_3 = \begin{pmatrix} -6 & -14 & -2 \\ 5 & 10 & 0 \\ -4 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors :

$$^tA \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -6a - 14b - 2c = 0 \\ 5a + 10b = 0 \\ -4a - 6b + 2c = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2b - 2c = 0 \\ a = -2b \\ 2b + 2c = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -2b \\ c = -b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -b \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le plan vectoriel d'équation $2x - y + z = 0$ est donc stable par f.

c. Introduisons la base suivante de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \underbrace{(1,2,0),(0,1,1)}_{\text{base de } 2x-y+z=0},(1,2,1).$$

On a alors :

$$\begin{cases} f(1,2,0) = (1,0,-2) = (1,2,0) - 2(0,1,1) \\ f(0,1,1) = (1,1,-1) = (1,2,0) - (0,1,1) \\ f(1,2,1) = (-3,-6,-3) = -3(1,2,1) \end{cases}$$

si bien que la matrice de f en base $\mathcal{B}$ est bien diagonale par blocs :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to (-2y+z, x-3y, -x+y-3z).$$

a. Calculer sous forme factorisée le polynôme caractéristique de f.

b. L'application f est-elle diagonalisable ? Déterminer tous les vecteurs propres de f.

c. Identifier tous les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f. L'application f est-elle diagonalisable par blocs ?

Solution: Notons :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

la matrice de f en base canonique.

a. Le polynôme caractéristique de f vaut :

$$\begin{vmatrix} -X & -2 & 1 \\ 1 & -3-X & 0 \\ -1 & 1 & -3-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -X & -2-X & 1 \\ 1 & -2-X & 0 \\ -1 & 0 & -3-X \end{vmatrix} = -(2+X) \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3-X \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = -(2+X) \begin{vmatrix} -1-X & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3-X \end{vmatrix} = -(2+X) \begin{vmatrix} -1-X & 1 \\ -1 & -3-X \end{vmatrix} = -(2+X)(X^2+4X+4) = -(2+X)^3.$$

Dans cette série d'égalités, la première est obtenue via l'opération $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$, la seconde par extraction du facteur $-2-X$, la troisième via l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ et la quatrième en développant par rapport à la deuxième colonne.

b. D'après a., on sait que l'application f possède une seule valeur propre, à savoir -2. Comme f n'est pas l'application $-2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ on peut donc conclure qu'elle n'est pas diagonalisable. Calculons alors la matrice :

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On sait par avance qu'elle est de rang 2. Le sous-espace $\mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ x - y = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z) = y(1,1,0).$$

Il s'agit donc de la droite vectorielle engendrée par $(1,1,0)$.

c. On a vu au a. que la matrice A possède -2 pour unique valeur propre. On sait qu'il en est de même de sa transposée :

$${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ecrivons alors la matrice :

$$ {}^{t}A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. $$

On sait par avance qu'elle est de rang 2 si bien que f possède un unique plan stable. On trouve alors :

$$ {}^{t}A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a + b - c = 0 \\ -2a - b + c = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = -a \\ c = a \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. $$

Le plan vectoriel d'équation $x - y + z = 0$ est donc stable par f, et c'est le seul. Observons alors que tous les vecteurs propres de f appartiennent à ce plan, puisqu'ils sont proportionnels à $(1, 1, 0)$ et que :

$$ 1 - 1 + 0 = 0. $$

Par conséquent, il est impossible de trouver un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ stable par f et un vecteur propre de f n'appartenant pas à ce plan : l'application linéaire f n'est pas diagonalisable par blocs.

Exercice 4. On donne l'application linéaire :

$$ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (3x - 4y - 4z, 3x - 5y - 8z, -2x + 4y + 7z). $$

a. Calculer le polynôme caractéristique de f et le factoriser. L'application f est-elle diagonalisable ?

b. Identifier tous les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

c. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ est diagonale par blocs.

Solution: Notons :

$$ A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 3 & -5 & -8 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix} $$

la matrice de f en base canonique.

a. Le polynôme caractéristique de f vaut :

$$ \begin{vmatrix} 3 - X & -4 & -4 \\ 3 & -5 - X & -8 \\ -2 & 4 & 7 - X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 - X & -4 & 0 \\ 3 & -5 - X & X - 3 \\ -2 & 4 & 3 - X \end{vmatrix} = (3 - X) \begin{vmatrix} 3 - X & -4 & 0 \\ 3 & -5 - X & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \cdots $$

$$ \cdots = (3 - X) \begin{vmatrix} 3 - X & -4 & 0 \\ 1 & -1 - X & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (3 - X) \begin{vmatrix} 3 - X & -4 \\ 1 & -1 - X \end{vmatrix} = (3 - X)(X^2 - 2X + 1) = (3 - X)(X - 1)^2. $$

Dans cette série d'égalités, la première est obtenue via l'opération $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$, la seconde par extraction du facteur $3 - X$, la troisième via $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ et la quatrième par développement par rapport à la troisième colonne. L'application f possède donc deux valeurs propres : 3, de multiplicité algébrique (et donc aussi géométrique) égale à 1 et 1, de multiplicité algébrique 2. Pour décider si elle est diagonalisable, calculons la matrice :

$$ A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 3 & -6 & -8 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}. $$

Cette matrice est de déterminant nul (car 1 est valeur propre de A) et elle n'est visiblement pas de rang inférieur ou égal à 1. Par conséquent, elle est de rang 2. On peut donc conclure que la valeur propre 1 est de multiplicité géométrique 1 : f n'est pas diagonalisable.

b. On a vu au a. que la matrice A possède deux valeurs propres, à savoir 1 et 3. On sait qu'il en est de même de sa transposée :

$$ {}^{t}A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -4 & -5 & 4 \\ -4 & -8 & 7 \end{pmatrix}. $$

Ecrivons alors les matrices :

$$ {}^tA - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -4 & -6 & 4 \\ -4 & -8 & 6 \end{pmatrix}, \quad {}^tA - 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -4 & -8 & 4 \\ -4 & -8 & 4 \end{pmatrix}. $$

On sait par avance que chacune d'elle est de rang 2 si bien qu'à chacune des valeurs propres il va correspondre exactement un plan stable. On trouve alors :

$$ {}^tA \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a + 3b - 2c = 0 \\ -4a - 6b + 4c = 0 \\ -4a - 8b + 6c = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a + 3b - 2c = 0 \\ -2b + 2c = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c = -2a \\ b = c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}. $$

Le plan vectoriel d'équation $x - 2y - 2z = 0$ est donc stable par f. De plus :

$$ {}^tA \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3b - 2c = 0 \\ -4a - 8b + 4c = 0 \\ -4a - 8b + 4c = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c = \frac{3}{2}b \\ a = -\frac{1}{2}b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{2}b \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. $$

Le plan vectoriel d'équation $-x + 2y + 3z = 0$ est donc stable par f.

c. Commençons par identifier les vecteurs propres de f. Pour cela, écrivons les matrices :

$$ A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 3 & -6 & -8 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 3 & -8 & -8 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}. $$

On sait par avance que chacune d'elle est de rang 2. Le sous-espace $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est l'ensemble des solutions du système :

$$ \begin{cases} 2x - 4y - 4z = 0 \\ 3x - 6y - 8z = 0 \\ -2x + 4y + 6z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2y + 2z \\ -2z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = y(2, 1, 0). $$

Il s'agit donc de la droite vectorielle engendrée par $(2, 1, 0)$. Le sous-espace $\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est l'ensemble des solutions du système :

$$ \begin{cases} -4y - 4z = 0 \\ 3x - 8y - 8z = 0 \\ -2x + 4y + 4z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -z \\ x = 0 \\ -2x = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = z(0, -1, 1). $$

Il s'agit donc de la droite vectorielle engendrée par $(0, -1, 1)$. Introduisons alors la base suivante de $\mathbb{R}^3$:

$$ \mathcal{B} = \underbrace{(2, 1, 0), (3, 0, 1)}_{\text{base de } -x+2y+3z=0}, (0, -1, 1). $$

On a alors :

$$ \begin{cases} f(2, 1, 0) = (2, 1, 0) \\ f(3, 0, 1) = (5, 1, 1) = (2, 1, 0) + (3, 0, 1) \\ f(0, -1, 1) = (0, -3, 3) = 3(0, -1, 1) \end{cases} $$

si bien que la matrice de f en base $\mathcal{B}$ est bien diagonale par blocs :

$$ [f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. $$

Observons pour terminer que pour le choix de base que l'on a fait, cette matrice est aussi triangulaire supérieure.

Exercice 5. On donne, en fonction des réels α, β et γ, l'application linéaire :

$$ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ (x, y, z) \to (-\alpha y - \beta z, \alpha x - \gamma z, \beta x + \gamma y). $$

a. Calculer sous forme factorisée le polynôme caractéristique de f.

b. A quelle condition sur α, β et γ l'application linéaire f est-elle diagonalisable ?

c. Montrer que f est diagonalisable par blocs.

Solution: Notons :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice de f dans la base canonique.

a. On sait que le polynôme caractéristique de f est donné par la formule suivante :

$$\chi_f(X) = -X^3 + \underbrace{(0+0+0)}_{\operatorname{tr} A} X^2 - (\begin{vmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\gamma \\ \gamma & 0 \end{vmatrix})X + \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix}}_{\det A}.$$

Or, on a, d'une part :

$$\begin{vmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{vmatrix} = \alpha^2, \quad \begin{vmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{vmatrix} = \beta^2, \quad \begin{vmatrix} 0 & -\gamma \\ \gamma & 0 \end{vmatrix} = \gamma^2$$

et, d'autre part :

$$\begin{vmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} = -\alpha \begin{vmatrix} -\alpha & -\beta \\ \gamma & 0 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} -\alpha & -\beta \\ 0 & -\gamma \end{vmatrix} = -\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma = 0.$$

Par conséquent,

$$\chi_f(X) = -X^3 - (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)X = -X(X^2+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$$

b. Dans le cas où :

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

on voit que f est l'application nulle, si bien qu'elle est diagonalisable. Dans le cas où (au moins) l'un des réels α, β, γ est non nul, on voit d'après le calcul fait au a. que f ne possède qu'une seule valeur propre, à savoir 0, et que celle-ci est de multiplicité algébrique (et donc aussi géométrique) égale à 1 :

$$\chi_f(X) = -X(X^2 + \underbrace{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}_{>0}).$$

Par conséquent, f n'est pas diagonalisable dans ce cas.

c. Il suffit d'établir que f est diagonalisable par blocs dans le cas où (au moins) l'un des réels α, β, γ est non nul. D'après b., f possède alors une seule valeur propre, à savoir 0, de multiplicité géométrique 1. Le sous-espace propre correspondant, qui n'est autre que $\operatorname{Ker} f$, formé des solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} -\alpha y - \beta z = 0 \\ \alpha x - \gamma z = 0 \\ \beta x + \gamma y = 0 \end{cases}$$

est donc une droite vectorielle. Observons alors que $(\gamma, -\beta, \alpha)$ est une solution non nulle de ce système. On en déduit :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((\gamma, -\beta, \alpha)).$$

Passons à la recherche d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ stable par f. Pour cela, observons que :

$${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} = -A$$

(la matrice A est antisymétrique). On voit alors que :

$${}^tA \begin{pmatrix} \gamma \\ -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} = -A \begin{pmatrix} \gamma \\ -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

si bien que le plan vectoriel d'équation $\gamma x - \beta y + \alpha z = 0$ est stable par f. En résumé, on a trouvé un plan vectoriel stable par f ainsi qu'un vecteur propre de f qui se trouve en dehors de ce plan stable, car :

$$\gamma \cdot \gamma - \beta \cdot (-\beta) + \alpha \cdot \alpha = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \neq 0.$$

Ceci suffit à prouver que f est diagonalisable par blocs.

Exercice 6. On donne une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et un plan vectoriel V de $\mathbb{R}^3$. Montrer que :

$$V \text{ stable par } f \quad \Leftrightarrow \quad \exists \omega \in \mathbb{R},\ \mathrm{Im}(f - \omega\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \subset V.$$

Solution: On raisonne par double implication. Pour montrer "$\Rightarrow$", fixons-nous une équation décrivant le plan vectoriel V :

$$V : ax + by + cz = 0.$$

On note aussi A la matrice de f en base canonique. Par hypothèse, le plan vectoriel V est stable par f. On sait donc qu'il existe une valeur propre ω de f telle que :

$$^t A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} A = \omega \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}.$$

Donnons-nous alors $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et posons $f(x, y, z) = (X, Y, Z)$. On obtient :

$$aX + bY + cZ = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \omega(ax + by + cz),$$

ce qui permet d'établir que :

$$\underbrace{f(v) - \omega v}_{(f - \omega\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(v)} = (X - \omega x, Y - \omega y, Z - \omega z)$$

appartient à V, puisque :

$$a(X - \omega x) + b(Y - \omega y) + c(Z - \omega z) = (aX + bY + cZ) - \omega(ax + by + cz) = 0.$$

Comme ceci a lieu pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, on a bien montré que :

$$\mathrm{Im}(f - \omega\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \{f(v) - \omega v \mid v \in \mathbb{R}^3\} \subset V.$$

Passons à la preuve de "$\Leftarrow$", c'est-à-dire que l'on suppose maintenant que :

$$\mathrm{Im}(f - \omega\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \subset V$$

pour un certain réel ω. Etant donné un élément v de V, on voit alors que :

$$f(v) = \underbrace{f(v) - \omega v}_{\in V} + \underbrace{\omega v}_{\in V}.$$

Par conséquent, $f(v)$ appartient à V, comme somme de deux éléments de V. On a bien montré que V est stable par f.