Série 21

Exercice 1. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \to (2x - 4y, x - 3y + z, -x + y + z).$$

a. Calculer le polynôme caractéristique de f et le factoriser.

b. f est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer une base propre pour f.

c. Représenter sur un croquis les sous-espaces propres de f ainsi qu'un point (x, y, z) et son image $f(x, y, z)$ par f.

Solution: Notons :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice de f dans la base canonique.

a. Calculons le polynôme caractéristique de f :

$$\begin{vmatrix} 2-X & -4 & 0 \\ 1 & -3-X & 1 \\ -1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-X & -2-X & 0 \\ 1 & -2-X & 1 \\ -1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & -1 \\ 1 & -2-X & 1 \\ -1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = -(X+2) \begin{vmatrix} 1-X & -1 \\ -1 & 1-X \end{vmatrix} = -(X+2)((1-X)^2 - 1) = -(X+2)X(X-2).$$

Dans cette série d'égalités, la première est obtenue via l'opération $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$, la seconde via $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ et la troisième par développement par rapport à la deuxième colonne.

b. L'application linéaire f possède trois valeurs propres distinctes : elle est donc diagonalisable. Par ailleurs on sait que pour produire une base propre pour f il suffit de sélectionner un vecteur propre (non nul) dans chaque sous-espace propre et de les "mettre ensemble" : la famille obtenue est automatiquement une base de $\mathbb{R}^3$, et elle est formée de vecteurs propres. Ecrivons alors les trois matrices :

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On sait par avance que chacune d'elle est de rang 2. Le sous-espace $\operatorname{Ker}(f + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} 4x - 4y = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -x + y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = x(1, 1, 0).$$

Il s'agit donc de la droite vectorielle engendrée par $(1, 1, 0)$. Le sous-espace $\operatorname{Ker} f$ est l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ x - 3y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = y \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = y(2, 1, 1).$$

Il s'agit donc de la droite vectorielle engendrée par $(2, 1, 1)$. Le sous-espace $\operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} -4y = 0 \\ x - 5y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = x(1, 0, -1).$$

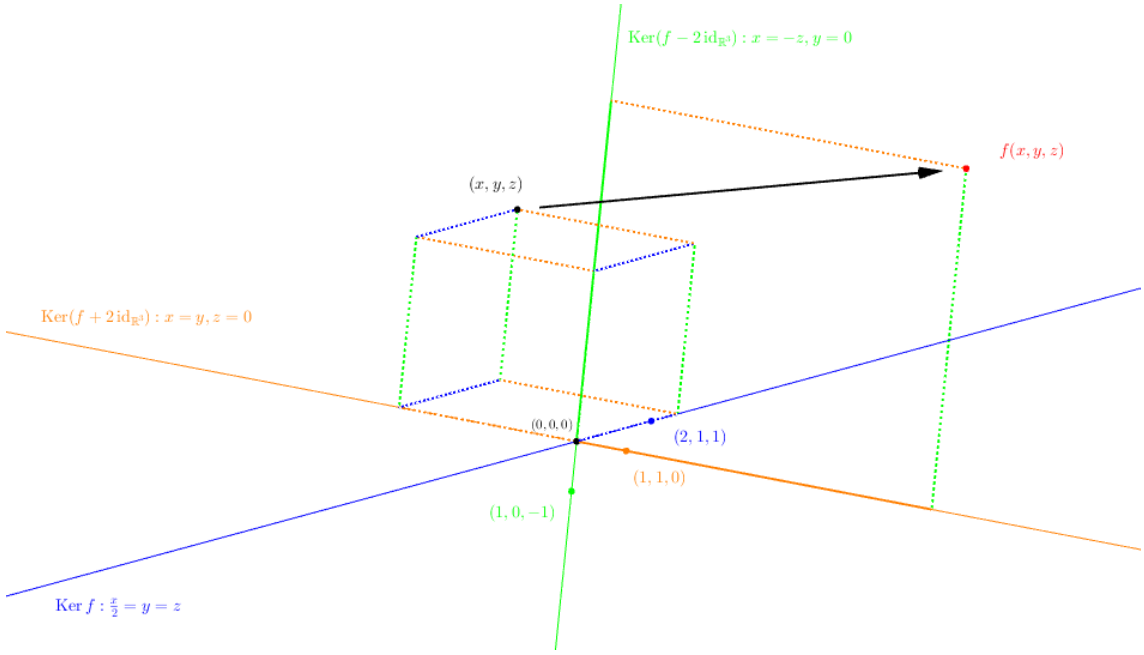
Il s'agit donc de la droite vectorielle engendrée par $(1, 0, -1)$. Posons alors :

$$\mathcal{B} = (1, 1, 0),\ (2, 1, 1),\ (1, 0, -1).$$

La famille $\mathcal{B}$ est une base propre pour f. On a :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

c. La figure suivante représente les trois sous-espaces propres de f ainsi qu'un point (x, y, z) et son image $f(x, y, z)$ par f :



Une fois (x, y, z) décomposé selon les trois axes, on "passe" à $f(x, y, z)$ de la façon suivante : la "coordonnée orange" est multipliée par -2, la "coordonnée bleue" est mise à zéro et la "coordonnée verte" est quant à elle multipliée par 2.

Exercice 2. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \to (4x - 5z, -2x + y + 4z, 3x + 2y - 2z).$$

a. Calculer $f(1, -1, 1)$. En déduire une valeur propre de f.

b. L'application linéaire f est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

Solution:

a. Un calcul direct donne :

$$f(1, -1, 1) = (4 - 5, -2 - 1 + 4, 3 - 2 - 2) = (-1, 1, -1) = -(1, -1, 1).$$

On en déduit que $(1, -1, 1)$ est un vecteur propre pour f, associé à la valeur propre -1.

b. Calculons le polynôme caractéristique de f. On trouve :

$$\begin{vmatrix} 4-X & 0 & -5 \\ -2 & 1-X & 4 \\ 3 & 2 & -2-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-X & 0 & -5 \\ 2-X & 1-X & -1 \\ 3 & 2 & -2-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-X & 0 & -5 \\ -1-X & -1-X & 1+X \\ 3 & 2 & -2-X \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = \begin{vmatrix} -1-X & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 1+X \\ 1-X & -X & -2-X \end{vmatrix} = -(1+X) \begin{vmatrix} -1-X & -5 \\ 1-X & -X \end{vmatrix} = -(1+X)(X^2 - 4X + 5).$$

Dans cette série d'égalités, la première est obtenue via l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, la seconde via $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, la troisième via les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$ et $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$ et la quatrième en développant par rapport à la deuxième ligne. Remarquons à présent que le trinôme qui est apparu dans la factorisation a pour discriminant $-4 < 0$ et n'a donc pas de racine. La valeur propre -1 de f trouvée au a. est donc la seule. Comme f n'est pas l'application $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ on peut conclure qu'elle n'est pas diagonalisable.

Remarque : le fait que -1 soit de multiplicité algébrique 1 entraine qu'elle est aussi de multiplicité géométrique 1. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est donc une droite vectorielle. D'après a., c'est donc la droite vectorielle engendrée par $(1, -1, 1)$.

Exercice 3. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \to \tfrac{1}{5}(4x - 2y - 7z, -x + 3y - 7z, -x - 2y - 2z).$$

a. Calculer le polynôme caractéristique de f. Donner les valeurs propres de f et leurs multiplicités algébriques.

b. f est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer une base propre pour f.

c. Faire apparaitre sur un croquis un point (x, y, z) et son image $f(x, y, z)$ par f. Quelle est la nature géométrique de f ?

Solution: Notons :

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -7 \\ -1 & 3 & -7 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

la matrice de f dans la base canonique.

a. Calculons le polynôme caractéristique de f. On trouve :

$$\frac{1}{125}\begin{vmatrix} 4-5X & -2 & -7 \\ -1 & 3-5X & -7 \\ -1 & -2 & -2-5X \end{vmatrix} = \frac{1}{125}\begin{vmatrix} 5-5X & 5X-5 & 0 \\ -1 & 3-5X & -7 \\ -1 & -2 & -2-5X \end{vmatrix} = \frac{1}{125}\begin{vmatrix} 5-5X & 0 & 0 \\ -1 & 2-5X & -7 \\ -1 & -3 & -2-5X \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = \frac{1}{25}(1-X)\begin{vmatrix} 2-5X & -7 \\ -3 & -2-5X \end{vmatrix} = \frac{1}{25}(1-X)(25X^2-25) = -(X+1)(X-1)^2.$$

Dans cette série d'égalités, la première est obtenue via l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, la seconde via $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$ et la troisième en développant par rapport à la première ligne. L'application linéaire f possède donc deux valeurs propres, à savoir : -1, de multiplicité algébrique 1 et 1, de multiplicité algébrique 2.

b. Ecrivons les deux matrices :

$$A + I_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & -2 & -7 \\ -1 & 8 & -7 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A - I_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -1 & -2 & -7 \\ -1 & -2 & -7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Celle de droite est de rang 1, et la décomposition écrite montre que le sous-espace propre associé est le plan vectoriel :

$$\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) : x + 2y + 7z = 0.$$

A ce stade on peut d'ores et déjà affirmer que f est diagonalisable. Pour trouver une base propre de f il suffit alors de "mettre ensemble" une base du plan vectoriel que l'on vient d'identifier et un vecteur propre (non nul) pour la valeur propre -1. Le sous-espace $\operatorname{Ker}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} 9x - 2y - 7z = 0 \\ -x + 8y - 7z = 0 \\ -x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 2y - 7z = 0 \\ -x + 8y - 7z = 0 \\ -10y + 10z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = x(1, 1, 1).$$

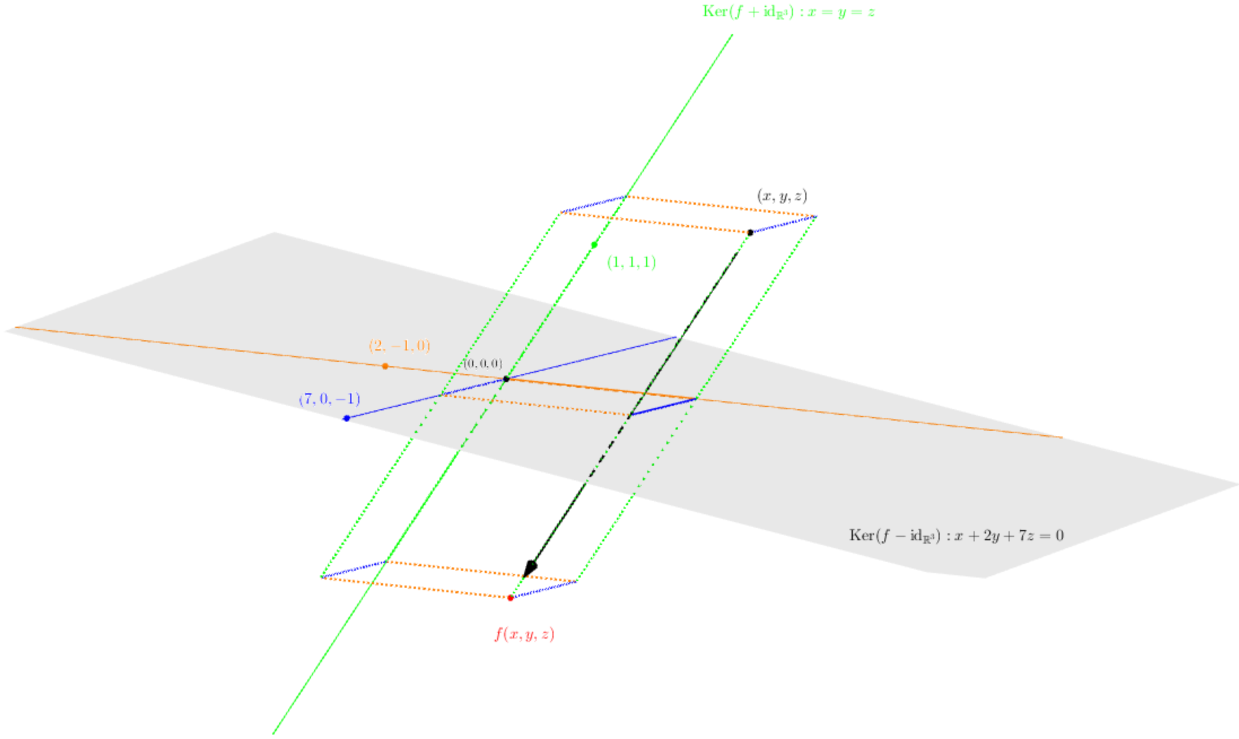
Il s'agit donc de la droite vectorielle engendrée par $(1, 1, 1)$. Posons alors :

$$\mathcal{B} = (2, -1, 0), (7, 0, -1), (1, 1, 1).$$

La famille $\mathcal{B}$ est une base propre pour f. On a :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c. La figure suivante représente les deux sous-espaces propres de f ainsi qu'un point (x, y, z) et son image $f(x, y, z)$ par f :



Une fois (x, y, z) décomposé selon les trois axes, on "passe" à $f(x, y, z)$ de la façon suivante : la "coordonnée orange" et la "coordonnée bleue" sont préservées, tandis que "coordonnée verte" est multipliée par -1. L'application linéaire f se visualise donc comme la symétrie par rapport au plan vectoriel d'équation $x + 2y + 3z = 0$, parallèlement à la droite vectorielle d'équations $x = y = z$.

Exercice 4. Etant donnés $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$, on considère l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (\alpha z, \beta y, \gamma x).$$

a. Si $\alpha\gamma < 0$ montrer que f n'est pas diagonalisable.

b. Si $\alpha\gamma > 0$ montrer que f est diagonalisable.

c. On suppose que $\alpha\gamma = 0$. f est-elle diagonalisable ?

Solution: La matrice de f en base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et son polynôme caractéristique vaut :

$$\begin{vmatrix} -X & 0 & \alpha \\ 0 & \beta - X & 0 \\ \gamma & 0 & -X \end{vmatrix} = (\beta - X)(X^2 - \alpha\gamma).$$

a. Supposons que $\alpha\gamma < 0$. Dans ce cas, la seule valeur propre de f est β. Sa multiplicité algébrique est 1, et donc sa multiplicité géométrique également. Par conséquent, f n'est pas diagonalisable.

b. Supposons à présent que $\alpha\gamma > 0$. Dans ce cas, le polynôme caractéristique de f se factorise sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} -X & 0 & \alpha \\ 0 & \beta - X & 0 \\ \gamma & 0 & -X \end{vmatrix} = (\beta - X)(X - \sqrt{\alpha\gamma})(X + \sqrt{\alpha\gamma}).$$

Dans cette factorisation on voit apparaitre trois racines, mais il faut prendre garde au fait qu'elles ne sont pas forcément distinctes. Du fait que $\alpha\gamma > 0$, on est en tout cas sûr que les deux dernières racines écrites sont différentes :

$$\sqrt{\alpha\gamma} \neq -\sqrt{\alpha\gamma}.$$

Si β est distinct de ces deux racines, alors f possède trois valeurs propres distinctes et on sait dans ce cas qu'elle est diagonalisable. Supposons à présent que :

$$\beta \in \{-\sqrt{\alpha\gamma}, \sqrt{\alpha\gamma}\}.$$

Les racines du polynôme caractéristique de f sont donc β, de multiplicité algébrique 2, et $-\beta$ de multiplicité algébrique 1. On sait dans ce cas que f est diagonalisable si et seulement si la multiplicité géométrique de β est aussi égale à 2, autrement dit, si l'on arrive à produire deux vecteurs propres non proportionnels pour la valeur propre β. Or une recherche de vecteurs propres montre par exemple que $(0,1,0)$ et $(\alpha,0,\beta)$ (qui est bien non nul, puis que $\alpha\gamma > 0$) fonctionnent :

$$f(0,1,0) = (0,\beta,0) = \beta(0,1,0) \quad \text{et} \quad f(\alpha,0,\beta) = (\alpha\beta,0,\alpha\gamma) = (\alpha\beta,0,\beta^2) = \beta(\alpha,0,\beta).$$

Comme ils ne sont pas proportionnels on peut conclure que f est bien diagonalisable dans ce cas aussi.

c. Supposons que $\alpha\gamma = 0$. Dans ce cas, le polynôme caractéristique de f se factorise sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} -X & 0 & \alpha \\ 0 & \beta - X & 0 \\ \gamma & 0 & -X \end{vmatrix} = (\beta - X)X^2.$$

Si $\beta = 0$ alors 0 est la seule valeur propre de f, si bien que f est diagonalisable si et seulement si c'est l'application nulle, autrement dit si et seulement si :

$$\alpha = \gamma = 0.$$

Supposons à présent que β est non nul. Dans ce cas, f est diagonalisable si et seulement si la valeur propre 0 a pour multiplicité géométrique 2, ou autrement dit si et seulement si la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 1. Comme β est non nul, ceci ne se produira à nouveau que si :

$$\alpha = \gamma = 0.$$

En conclusion, on voit que, sous l'hypothèse que $\alpha\gamma = 0$, f est diagonalisable si et seulement si α et γ sont nuls. Si l'un de ces deux coefficients est nul sans que l'autre le soit alors l'application n'est pas diagonalisable.

Exercice 5. On donne une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de rang 1 et on note $\lambda = \operatorname{tr} f$.

a. On suppose que λ est non nul. Montrer que f est diagonalisable.

b. Qu'en est-il si λ est nul ? f est-elle diagonalisable ? Justifier.

Solution:

a. L'application f étant de rang 1 et de trace non nulle, on sait que $g = \frac{1}{\lambda} f$ est la projection sur :

$$\underbrace{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(v_1)}_{\text{droite vectorielle}}$$

parallèlement à :

$$\underbrace{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(v_2, v_3)}_{\text{plan vectoriel}}.$$

On a donc :

$$\begin{cases} g(v_1) = v_1 \\ g(v_2) = (0,0,0) \\ g(v_3) = (0,0,0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(v_1) = \lambda v_1 \\ f(v_2) = (0,0,0) \\ f(v_3) = (0,0,0). \end{cases}$$

La famille :

$$\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$$

est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres pour f. L'application linéaire f est donc diagonalisable :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Supposons que λ est nul. Dans ce cas on sait, du fait que f est de rang 1, que :

$$\underbrace{f \circ f}_{\lambda f} = 0.$$

Ceci permet alors de voir que 0 est la seule valeur propre de f. En effet, si ω est valeur propre de f et v est un vecteur propre (non nul) pour cette valeur propre, on a :

$$f(v) = \omega v \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(f(v))}_{(0,0,0)} = \omega f(v) = \omega^2 v.$$

Comme v est non nul on voit que ω^2 est nul, ou encore que ω est nul. Si f était diagonalisable elle serait donc l'application nulle, or elle est de rang 1. On en déduit que f n'est pas diagonalisable dans ce cas.

Exercice 6. On donne deux applications linéaires $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui commutent, c'est-à-dire vérifiant :

$$f \circ g = g \circ f.$$

a. Si v est un vecteur propre (non nul) de f, que peut-on-dire de $g(v)$?
b. On suppose que f possède trois valeurs propres distinctes. Montrer que g est diagonalisable.
c. Le résultat du b. est-il encore valable si l'on suppose seulement que f est diagonalisable ?

Solution:

a. Supposons que le vecteur propre v de f soit attaché à la valeur propre ω, c'est-à-dire que l'on a :

$$f(v) = \omega v.$$

En utilisant le fait que f et g commutent, on trouve alors :

$$f(g(v)) = g(f(v)) = g(\omega v) = \omega g(v).$$

Cette égalité signifie exactement que $g(v)$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre ω. En d'autres termes, on vient de montrer que g "stabilise" chacun des sous-espaces propres de f.

b. Sous l'hypothèse que f possède trois valeurs propres distinctes on sait qu'elle est diagonalisable et que chacun de ses sous-espaces propres est une droite vectorielle. En reprenant les notations du a. on voit donc que le sous-espace propre de f pour la valeur propre ω est :

$$\mathrm{Ker}(f - \omega\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}(v).$$

Comme $g(v)$ lui appartient, on peut en déduire que c'est un multiple scalaire de v. Autrement dit, v est aussi un vecteur propre de g. En résumé, on vient de montrer qu'un vecteur propre pour f est automatiquement vecteur propre pour g. Une base propre pour f est donc automatiquement une base propre pour g. Par conséquent g est diagonalisable puisque f l'est. On a même montré que ces deux applications peuvent même être "simultanément diagonalisées", c'est-à-dire diagonalisées dans la même base.

c. Non. Par exemple, prenons $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ et pour g une application linéaire non diagonalisable. Il est clair que f est diagonalisable et que f et g commutent. Par contre, par choix même de g cette application n'est pas diagonalisable. La conclusion du b. ne tient donc pas sous l'hypothèse (plus faible) que f est seulement diagonalisable.