Série 20

Exercice 1. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (-3x - y + 2z, 3x - 7y + 6z, x - y - 2z).$$

a. Montrer que f possède une unique valeur propre dont on déterminera la valeur.

b. Quelle est sa multiplicité algébrique ? Sa multiplicité géométrique ?

c. Déterminer une base de l'unique sous-espace propre de f.

Solution:

a. La matrice de f en base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculons le polynôme caractéristique de f. On trouve :

$$\begin{vmatrix} -3-X & -1 & 2 \\ 3 & -7-X & 6 \\ 1 & -1 & -2-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-X & -4-X & 2 \\ 3 & -4-X & 6 \\ 1 & 0 & -2-X \end{vmatrix} = -(X+4) \begin{vmatrix} -3-X & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -2-X \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = -(X+4) \begin{vmatrix} -3-X & 1 & 2 \\ 6+X & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2-X \end{vmatrix} = (X+4) \begin{vmatrix} 6+X & 4 \\ 1 & -2-X \end{vmatrix} = (X+4)(-X^2 - 8X - 16) = -(X+4)^3.$$

Dans cette série d'égalité, la première a été obtenue via l'opération $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$, la seconde par extraction du facteur $-X - 4$, la troisième via l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et la quatrième en développant selon la deuxième colonne. On voit donc que f possède une seule valeur propre, à savoir $\omega = -4$.

b. D'après le calcul effectué au a. on voit directement que -4 est de multiplicité algébrique 3. Pour déterminer sa multiplicité géométrique, calculons la matrice :

$$A + 4I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On voit donc que l'application $f + 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ est de rang 1, si bien que son noyau est de dimension 2. La multiplicité géométrique de -4 est égale à 2.

c. La décomposition colonne-ligne trouvée en b. nous permet de dire que $\mathrm{Ker}(f + 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est le plan vectoriel d'équation :

$$x - y + 2z = 0.$$

Pour trouver une base de ce plan vectoriel il n'y a qu'à sélectionner deux éléments non proportionnels dessus comme par exemple :

$$(1, 1, 0), (0, 2, 1).$$

Ce n'est pas demandé, mais c'est une bonne idée de vérifier que les deux triplets que l'on vient d'écrire sont effectivement vecteurs propres de f en calculant directement leurs images par f :

$$\begin{cases} f(1,1,0) = (-3 \cdot 1 - 1 + 2 \cdot 0, 3 \cdot 1 - 7 \cdot 1 + 6 \cdot 0, 1 - 1 - 2 \cdot 0) = (-4, -4, 0) = -4(1,1,0) \\ f(0,2,1) = (-3 \cdot 0 - 2 + 2 \cdot 1, 3 \cdot 0 - 7 \cdot 2 + 6 \cdot 1, 0 - 2 - 2 \cdot 1) = (0, -8, -4) = -4(0,2,1). \end{cases}$$

Exercice 2. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (-3x - 2y, 6x + 5y, 2x + 2y - z).$$

a. Identifier les valeurs propres de f et donner pour chacune sa multiplicité géométrique.

b. Décrire les sous-espaces propres de f par des équations.

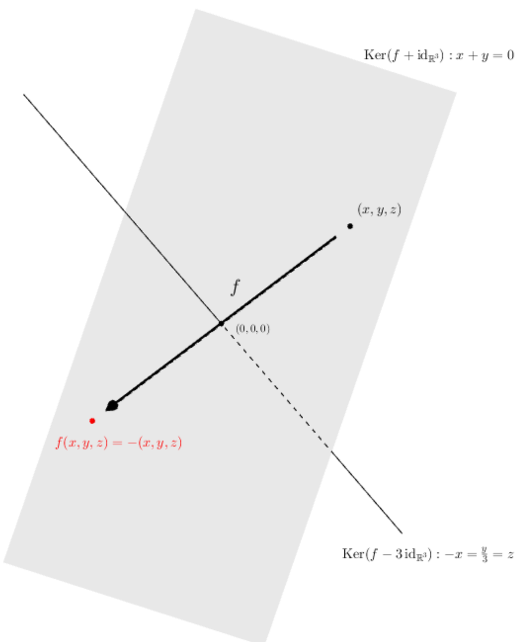
c. Représenter sur un croquis les sous-espaces propres de f et faire apparaitre l'action de f sur chacun d'eux.

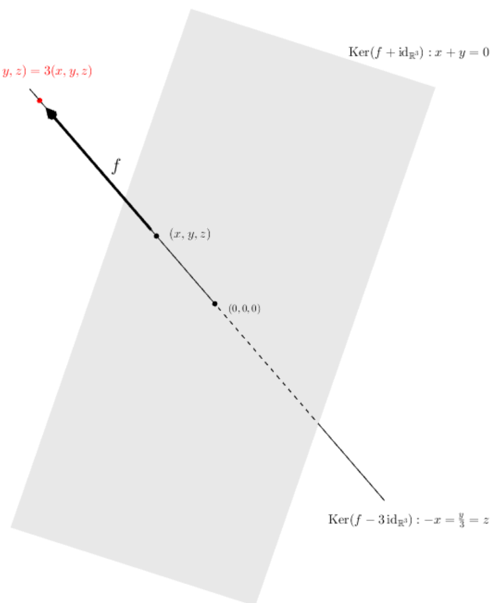
Solution:

a. La matrice de f en base canonique est :
$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
Calculons le polynôme caractéristique de f. On trouve :
$$\begin{vmatrix} -3-X & -2 & 0 \\ 6 & 5-X & 0 \\ 2 & 2 & -1-X \end{vmatrix} = -(X+1)\begin{vmatrix} -3-X & -2 \\ 6 & 5-X \end{vmatrix} = -(X+1)(X^2-2X-3) = -(X+1)^2(X-3).$$
L'application f possède donc deux valeurs propres, à savoir -1 (de multiplicité algébrique 2) et 3 (de multiplicité algébrique 1). Pour déterminer les multiplicités géométriques de ces valeurs propres, calculons les matrices :
$$A + I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$
La matrice de gauche est de rang 1, ce qui implique que le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est un plan vectoriel : la valeur propre -1 est de multiplicité géométrique 2. La matrice de droite est quant à elle de rang 2 (on sait qu'elle est de déterminant nul et elle n'est visiblement pas de rang $\leqslant 1$). Par conséquent, le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est une droite vectorielle : la valeur propre 3 est de multiplicité géométrique 1 (on aurait aussi pu obtenir cette conclusion en utilisant l'inégalité $d_3 \leqslant e_3 = 1$).

b. La décomposition colonne-ligne suivante :
$$A + I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
montre que $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est le plan vectoriel d'équation :
$$x + y = 0.$$
Par ailleurs, le sous-espace $\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est l'ensemble des solutions du système :
$$\begin{cases} -6x - 2y = 0 \\ 6x + 2y = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -3x \\ z = -x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = x(1, -3, -1).$$
Il s'agit donc de la droite vectorielle engendrée par $(-1, 3, 1)$, qui a pour équations :
$$-x = \frac{y}{3} = z.$$

c. Voici deux figures représentants les éléments demandés :





Exercice 3. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (8x + y - 10z, -7x + 7z, x + y - 3z).$$

a. Calculer le polynôme caractéristique de f.

b. Quelles sont les valeurs propres de f ? Déterminer leurs multiplicités géométriques.

c. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de f.

Solution:

a. La matrice de f en base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -10 \\ -7 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calculons le polynôme caractéristique de f. On trouve :

$$\begin{vmatrix} 8-X & 1 & -10 \\ -7 & -X & 7 \\ 1 & 1 & -3-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8-X & 1 & -2-X \\ -7 & -X & 0 \\ 1 & 1 & -2-X \end{vmatrix} = -(X+2) \begin{vmatrix} 8-X & 1 & 1 \\ -7 & -X & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = -(X+2) \begin{vmatrix} 7-X & 0 & 0 \\ -7 & -X & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(X+2)(7-X) \begin{vmatrix} -X & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (X+2)(7-X)X.$$

b. L'application f possède donc trois valeurs propres, à savoir -2, 0 et 7. Ces trois valeurs propres sont de multiplicité algébrique 1 et donc aussi de multiplicité géométrique 1.

c. Commençons par écrire les trois matrices :

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -10 \\ -7 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -10 \\ -7 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 7I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -10 \\ -7 & -7 & 7 \\ 1 & 1 & -10 \end{pmatrix}.$$

On sait par avance que chacune d'elle est de rang 2. Le sous-espace $\operatorname{Ker}(f + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} 10x + y - 10z = 0 \\ -7x + 2y + 7z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + y - 10z = 0 \\ -27x + 27z = 0 \\ -9x + 9z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = x \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = x(1, 0, 1).$$

Il s'agit donc de la droite vectorielle engendrée par $(1, 0, 1)$. Le sous-espace $\operatorname{Ker} f$ est l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} 8x + y - 10z = 0 \\ -7x + 7z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = x \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = x(1, 2, 1).$$

Il s'agit donc de la droite vectorielle engendrée par $(1, 2, 1)$. Le sous-espace $\operatorname{Ker}(f - 7\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} x + y - 10z = 0 \\ -7x - 7y + 7z = 0 \\ x + y - 10z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 10z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = x(1, -1, 0).$$

Il s'agit donc de la droite vectorielle engendrée par $(1, -1, 0)$.

Exercice 4. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, sachant que :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (-2x - 29y + 11z, 8x + 41y - 14z, 22x + 94y - 31z).$$

a. f a une valeur propre de multiplicité géométrique 3. b. $(-1, 1, 2)$ est vecteur propre de f. c. 0 est valeur propre de f.

Solution: Notons A la matrice de f en base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -29 & 11 \\ 8 & 41 & -14 \\ 22 & 94 & -31 \end{pmatrix}.$$

a. C'est faux. Si ω était une telle valeur propre, alors on aurait :

$$\operatorname{Ker}(f - \omega\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \mathbb{R}^3$$

si bien que f serait égale à $\omega\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$. Or A n'est pas de la forme ωI_3.

b. C'est vrai. Pour décider si $(-1,1,2)$ est vecteur propre de f il suffit de tester s'il est proportionnel à son image par f. Or :

$$f(-1,1,2) = (2-29+22, -8+41-28, -22+94-62) = (-5,5,10) = 5(-1,1,2).$$

Par conséquent, $(-1,1,2)$ est vecteur propre de f pour la valeur propre 5.

c. C'est vrai. 0 est valeur propre de f si et seulement si le déterminant de A est nul. Or :

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & -29 & 11 \\ 8 & 41 & -14 \\ 22 & 94 & -31 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 11 \\ 8 & -1 & -14 \\ 22 & 1 & -31 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -90 & 0 & 135 \\ 30 & 0 & -45 \\ 22 & 1 & -31 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -90 & 135 \\ 30 & -45 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 30 & -45 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans cette série d'égalités, la deuxième a été obtenue via $C_2 \leftarrow C_2 + 3C_3$, la troisième via $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$, la quatrième en développant par rapport à la seconde colonne et la cinquième via l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$.

Exercice 5. On donne la matrice 3×3 suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Montrer la formule suivante pour le calcul du polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(X) = -X^3 + \underbrace{(\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2} + \alpha_{3,3})}_{\operatorname{tr} A} X^2 - \left(\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}\right) X + \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}}_{\det A}.$$

Solution: Ecrivons directement le déterminant sous forme développée :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} - X & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} - X & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} - X \end{vmatrix} = (\alpha_{1,1} - X)(\alpha_{2,2} - X)(\alpha_{3,3} - X) + \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{3,1} + \alpha_{1,3}\alpha_{2,1}\alpha_{3,2} \cdots$$

$$\cdots - (\alpha_{1,1} - X)\alpha_{3,2}\alpha_{2,3} - \alpha_{3,1}(\alpha_{2,2} - X)\alpha_{1,3} - \alpha_{2,1}\alpha_{1,2}(\alpha_{3,3} - X).$$

Le développement du premier terme dans cette somme est :

$$(\alpha_{1,1} - X)(\alpha_{2,2} - X)(\alpha_{3,3} - X) = -X^3 + (\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2} + \alpha_{3,3})X^2 - (\alpha_{1,1}\alpha_{2,2} + \alpha_{1,1}\alpha_{3,3} + \alpha_{2,2}\alpha_{3,3})X + \alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\alpha_{3,3}.$$

En réinjectant dans l'expression ci-dessus, on trouve :

$$\chi_A(X) = -X^3 + (\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2} + \alpha_{3,3})X^2 - (\alpha_{1,1}\alpha_{2,2} + \alpha_{1,1}\alpha_{3,3} + \alpha_{2,2}\alpha_{3,3} - \alpha_{3,2}\alpha_{2,3} - \alpha_{3,1}\alpha_{1,3} - \alpha_{2,1}\alpha_{1,2})X + \cdots$$

$$\cdots + \alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\alpha_{3,3} + \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{3,1} + \alpha_{1,3}\alpha_{2,1}\alpha_{3,2} - \alpha_{1,1}\alpha_{3,2}\alpha_{2,3} - \alpha_{2,2}\alpha_{3,1}\alpha_{1,3} - \alpha_{3,3}\alpha_{2,1}\alpha_{1,2}.$$

Il ne reste plus qu'à constater que les coefficients obtenus sont égaux à ceux de la formule donnée dans l'énoncé :

$$\chi_A(X) = -X^3 + \underbrace{(\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2} + \alpha_{3,3})}_{\operatorname{tr} A} X^2 - \left(\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}\right) X + \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}}_{\det A}.$$

Exercice 6.

a. Quels sont les polynômes caractéristiques possibles d'une projection ? Autrement dit, déterminer l'ensemble :

$$\{\chi_A(X) \mid A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \text{ matrice de projection}\}.$$

b. Si le polynôme caractéristique de l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

appartient à l'ensemble trouvé au a., est-ce que f est obligatoirement une projection ?

Solution:

a. Donnons-nous une projection :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

de matrice A en base canonique et appelons r le rang de f. Si $r = 0$, alors l'application f est nulle, si bien que :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & 0 \\ 0 & -X & 0 \\ 0 & 0 & -X \end{vmatrix} = -X^3.$$

Si $r = 3$, l'application f est l'identité (c'est la seule projection inversible), si bien que :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^3.$$

Supposons dorénavant que $r \in \{1, 2\}$. Dans ce cas 0 est valeur propre de f, le sous-espace propre associé étant :

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = (0,0,0)\}.$$

La multiplicité géométrique de 0 est donc $3 - r$, si bien que sa multiplicité algébrique est supérieure ou égale à $3 - r$:

$$e_0 \geqslant d_0 = 3 - r.$$

L'application f étant une projection, on sait par ailleurs que :

$$\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \operatorname{Im} f.$$

Comme ce sous-espace vectoriel est non nul (car $r \neq 0$), on voit donc que 1 est valeur propre de f, de multiplicité géométrique r. On a donc :

$$e_1 \geqslant d_1 = r.$$

En combinant les deux inégalités trouvées ci-dessus on obtient :

$$e_0 + e_1 \geqslant 3.$$

Or la somme des multiplicités algébriques de toutes les valeurs propres de f est toujours inférieure ou égale à 3. On peut donc conclure que 0 et 1 sont les seules valeurs propres de f et que leurs multiplicités algébriques sont respectivement :

$$e_0 = 3 - r \quad \text{et} \quad e_1 = r.$$

Autrement dit, le polynôme caractéristique de f vaut :

$$\underbrace{X^2(1-X)}_{\text{si } r=1} \quad \text{ou} \quad \underbrace{-X(1-X)^2}_{\text{si } r=2}.$$

En résumé, il y a quatre polynômes caractéristique possibles pour une projection dans $\mathbb{R}^3$, à savoir :

$$\underbrace{-X^3}_{\text{si } r=0}, \ \underbrace{X^2(1-X) = -X^3 + X^2}_{\text{si } r=1}, \ \underbrace{-X(1-X)^2 = -X^3 + 2X^2 - X}_{\text{si } r=2}, \ \underbrace{(1-X)^3 = -X^3 + 3X^2 - 3X + 1}_{\text{si } r=3}.$$

Une petite remarque pour finir. En inspectant les polynômes trouvés on peut constater que le coefficient de X^2 est toujours égal au rang. Or d'après la formule générale vue au cours pour le polynôme caractéristique, ce coefficient est aussi égal à la trace. On retrouve donc le résultat vu à l'exercice 7 de la série 19, à savoir que si f est une projection alors :

$$\operatorname{tr} f = \operatorname{rg} f.$$

b. Non. Par exemple, l'application :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ , \ (x, y, z) \to (z, 0, 0)$$

a pour polynôme caractéristique :

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & 1 \\ 0 & -X & 0 \\ 0 & 0 & -X \end{vmatrix} = -X^3$$

(c'est-à-dire le même que l'application nulle). Pour autant, cette application n'est pas une projection, comme on peut le vérifier par exemple en itérant f deux fois :

$$f(f(x, y, z)) = f(z, 0, 0) = (0, 0, 0).$$

On voit donc que $f \circ f$ est nulle, et qu'elle n'est donc pas égale à f. Pour voir que f n'est pas une projection on peut aussi constater que f est de rang 1 mais n'est pas de trace 1. Avoir son polynôme caractéristique égal à l'un de ceux identifiés au a. est donc une condition nécessaire pour être une projection, mais pas une condition suffisante.

Exercice 7. Vrai ou faux ? Pour toute application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont le réel ω est valeur propre ...

a. ... le réel $\omega + 1$ est valeur propre de l'application linéaire $f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

b. ... l'application linéaire $f \circ f - \omega^2 \,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ est non inversible.

c. ... si ω est la seule valeur propre de f alors elle a pour multiplicité algébrique 3.

Si vous pensez que c'est vrai expliquez pourquoi. Si vous pensez que c'est faux donnez un contre-exemple.

Solution:

a. C'est vrai. Pour montrer cela, donnons-nous un vecteur propre (non nul) v de f pour la valeur propre ω. On a donc :

$$f(v) = \omega v.$$

On en déduit :

$$\underbrace{f(v) + v}_{(f+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(v)} = \omega v + v = (\omega + 1)v$$

Par conséquent, v est vecteur propre pour $f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ associé à la valeur propre $\omega + 1$.

b. C'est vrai. Reprenons les notations du a. On a alors :

$$\underbrace{f(f(v))}_{(f\circ f)(v)} = f(\omega v) = \omega \underbrace{f(v)}_{\omega v} = \omega^2 v.$$

si bien que :

$$(f \circ f - \omega^2 \,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(v) = (0, 0, 0)$$

Le noyau de l'application $f \circ f - \omega^2 \,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ est donc non nul, si bien que cette application n'est pas inversible.

c. C'est faux. Il est en effet possible que le polynôme carctéristique de f possède une unique racine et que celle-ci soit de multiplicité algébrique 1. Par exemple, considérons l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (x, z, -y)$$

dont la matrice en base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 1 - X & 0 & 0 \\ 0 & -X & 1 \\ 0 & -1 & -X \end{vmatrix} = (1 - X) \begin{vmatrix} -X & 1 \\ -1 & -X \end{vmatrix} = (1 - X)(X^2 + 1).$$

L'application f possède une unique valeur propre, à savoir 1, et celle-ci est de multiplicité algébrique 1.