Série 19

Exercice 1. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to (-\tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}z, \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{4}z, \tfrac{3}{4}y + \tfrac{3}{4}z).$$

a. Montrer que f est une projection et décrire les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ de $\mathbb{R}^3$.

b. Quel est l'ensemble $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ formé des éléments de $\mathbb{R}^3$ fixés par f ?

c. Représenter sur un croquis les éléments caractéristiques de f ainsi qu'un point (x,y,z) et son image $f(x,y,z)$ par f.

Solution:

a. La matrice de f en base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

On peut alors constater que A est de rang 1 et de trace 1, si bien que f est une projection. Pour voir cela on aurait aussi pu (mais c'est un peu plus long !) montrer que A est égale à son carré :

$$A^2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & -8 & -8 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 12 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

La décomposition :

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

permet alors de donner les descriptions suivantes de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$:

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((-2,1,3)) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ker} f : y + z = 0.$$

L'application f est la projection sur la droite vectorielle $\operatorname{Vect}((-2,1,3))$ parallèlement au plan vectoriel d'équation $y + z = 0$.

b. Comme f est une projection, on sait que l'ensemble de ses points fixes est exactement $\operatorname{Im} f$. Autrement dit :

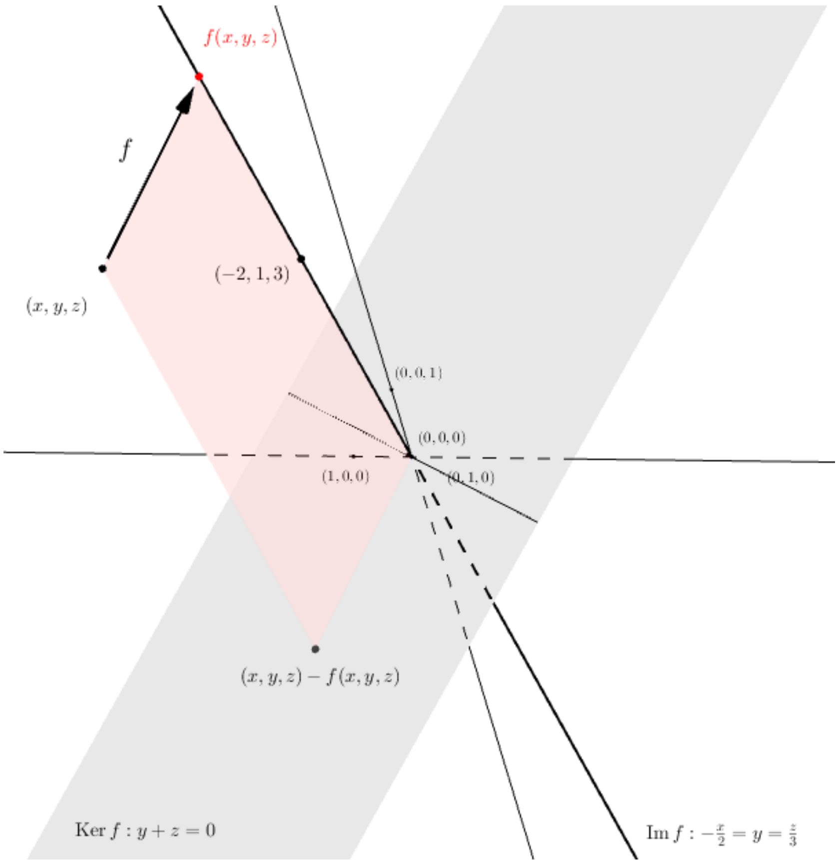
$$\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((-2,1,3)).$$

On aurait aussi pu retrouver ce résultat en recherchant directement les triplets fixés par f :

$$f(x,y,z) = (x,y,z) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = x \\ \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = y \\ \frac{3}{4}y + \frac{3}{4}z = z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = x \\ \frac{1}{4}z = \frac{3}{4}y \\ \frac{3}{4}y = \frac{1}{4}z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = x \\ z = 3y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -2y \\ z = 3y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) = (-2y, y, 3y) \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) = y(-2,1,3).$$

c. Voici une figure représentant l'application étudiée dans cet exercice :



Le parallélogramme que l'on a fait apparaitre sur le dessin correspond géométriquement au fait que tout triplet (x,y,z) s'écrit comme la somme d'un triplet fixé par f (c'est-à-dire un multiple scalaire de $(-2,1,3)$) et d'un triplet annulé par f (c'est-à-dire appartenant au plan vectoriel $y+z=0$) :

$$(x,y,z) = \underbrace{f(x,y,z)}_{\text{point fixe de } f} + \underbrace{(x,y,z)-f(x,y,z).}_{\text{point envoyé sur (0,0,0) par } f}$$

Exercice 2. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to (-\tfrac{1}{4}z, -\tfrac{1}{3}x + y - \tfrac{1}{12}z, z).$$

a. Quelle est la nature géométrique de f ?

b. Déterminer l'application $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - f$. En déduire $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

c. Représenter sur un croquis les éléments caractéristiques de f ainsi qu'un point (x,y,z) et son image $f(x,y,z)$ par f.

Solution:

a. La matrice de f en base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -4 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct donne alors :

$$A^2 = \frac{1}{144}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -4 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -4 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{144}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -36 \\ -48 & 144 & -12 \\ 0 & 0 & 144 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -4 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = A.$$

Par conséquent, f est une projection.

b. L'application $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - f$ est linéaire de matrice :

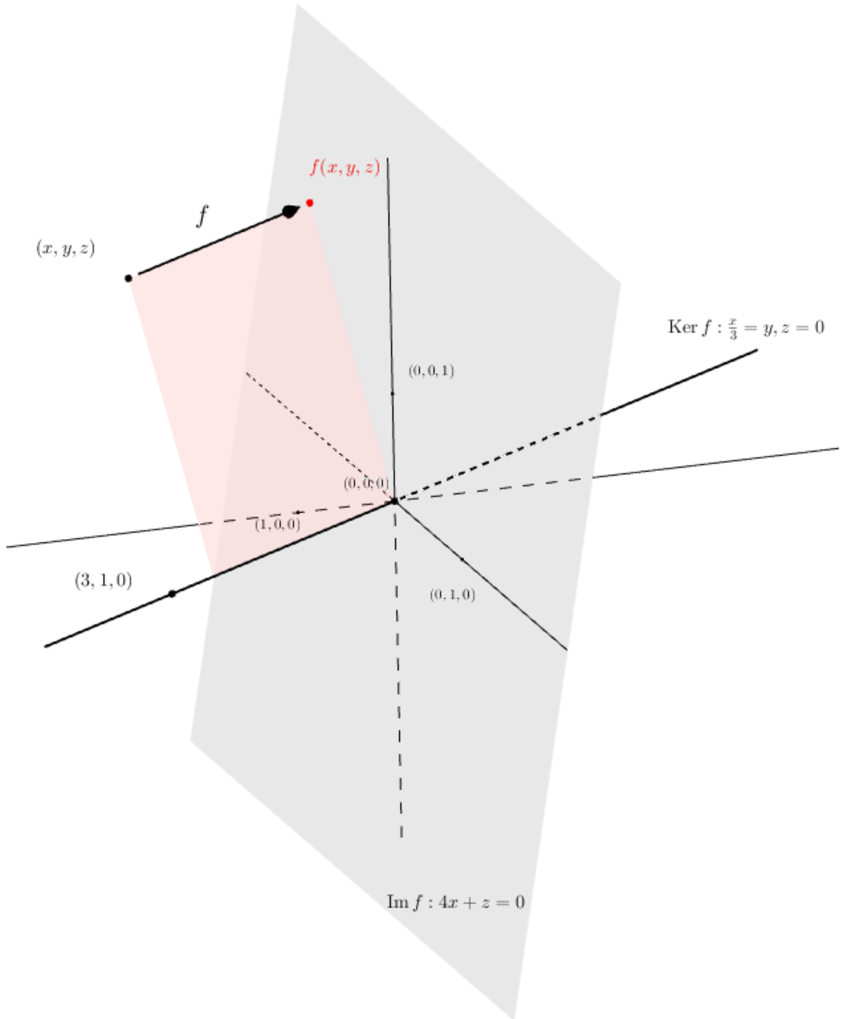
$$I_3 - A = I_3 - \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -4 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme f est une projection, on sait que $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - f$ en est aussi une et que :

$$\operatorname{Ker}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - f) = \operatorname{Im} f, \qquad \operatorname{Im}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - f) = \operatorname{Ker} f.$$

La décomposition colonne-ligne ci-dessus permet alors de voir que $\operatorname{Im} f$ est le plan vectoriel d'équation $4x + z = 0$ et que $\operatorname{Ker} f$ est la droite vectorielle engendrée par $(3, 1, 0)$.

c. Voici une figure représentant l'application étudiée dans cet exercice :



Exercice 3. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to \tfrac{1}{2}(x - 2y + 3z)(1, 0, 1).$$

a. Quel est le rang de f ? Donner des équations de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

b. Déterminer l'expression de la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$.

c. Représenter sur un croquis les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ ainsi qu'un point (x, y, z) et son image par f.

Solution:

a. La matrice de f dans la base canonique est égale à :

$$A = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On voit donc que f est de rang 1 et que :

$$\underbrace{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((1, 0, 1))}_{\text{droite vectorielle d'équations } x=z, y=0} \quad , \qquad \operatorname{Ker} f : x - 2y + 3z = 0.$$

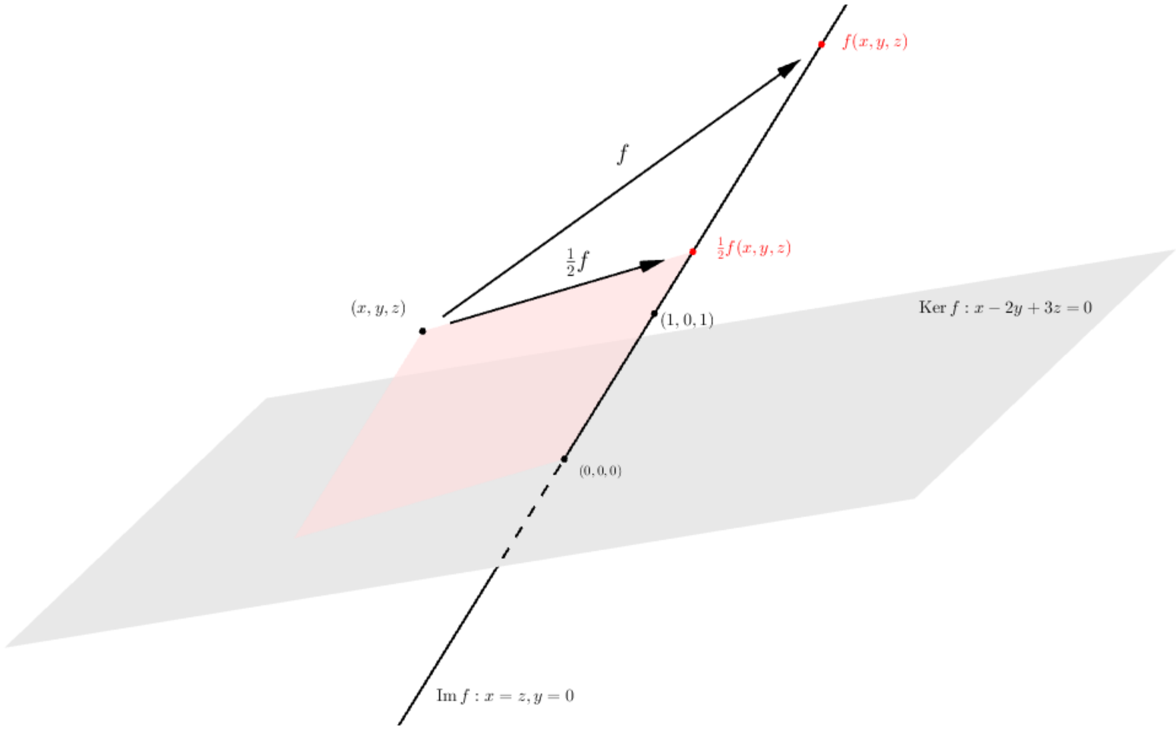
b. Calculons la trace de f :

$$\operatorname{tr} f = \operatorname{tr} A = \tfrac{1}{2} + 0 + \tfrac{3}{2} = 2.$$

Comme f est de rang 1, on sait dans ces conditions que $\frac{1}{2} f$ est la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$. Autrement dit, l'application linéaire recherchée est :

$$\tfrac{1}{2} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to \tfrac{1}{4}(x - 2y + 3z)(1, 0, 1).$$

c. Voici une figure représentant $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$ ainsi que les applications f et $\frac{1}{2}f$ étudiées dans cet exercice :



Exercice 4. Déterminer l'expression de la projection :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

sur le plan vectoriel d'équation $x-y+3z=0$ parallèlement à la droite vectorielle engendrée par $(1,-2,4)$.

Solution: Notons A la matrice de f en base canonique. Posons aussi :

$$g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - f.$$

On sait que g est la projection sur $\operatorname{Vect}((1,-2,4))$ parallèlement au plan vectoriel d'équation $x-y+3z=0$. Par conséquent, on a :

$$\operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}((1,-2,4)), \quad \operatorname{Ker} g : x-y+3z=0, \qquad \underbrace{\operatorname{tr} g = 1.}_{\text{car } g \text{ projection de rang } 1}$$

Notant B la matrice de g en base canonique, on trouve alors :

$$B = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \\ 4 & -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

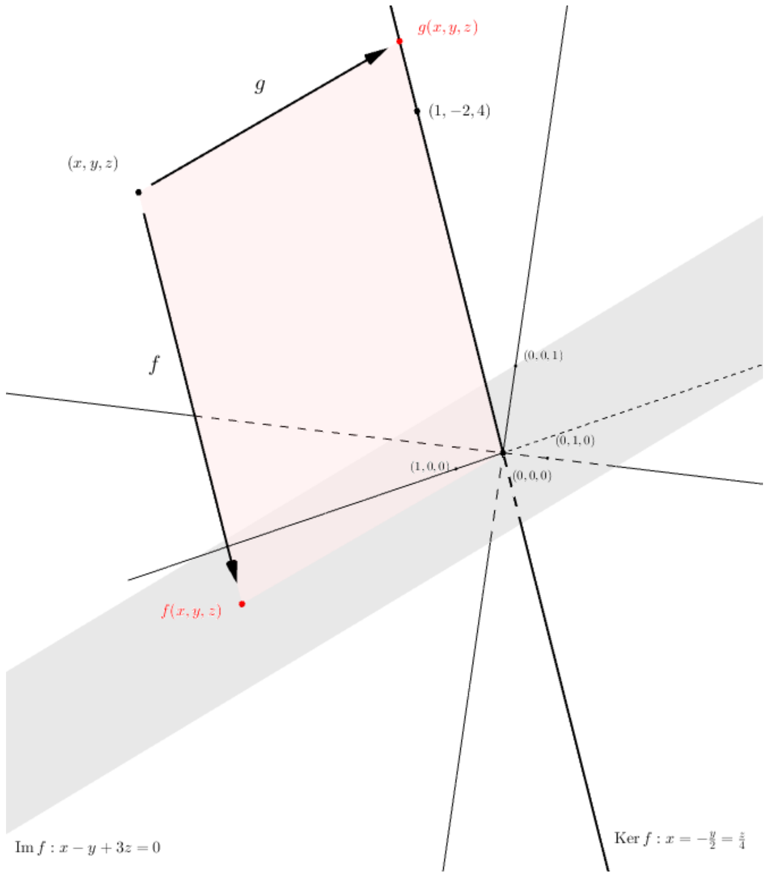
Comme $B = I_3 - A$, on obtient maintenant :

$$A = I_3 - B = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 14 & 1 & -3 \\ 2 & 13 & 6 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, on trouve l'expression suivante pour f :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to \frac{1}{15}(14x+y-3z, 2x+13y+6z, -4x+4y+3z).$$

Ce n'est pas demandé, mais terminons avec un dessin représentant la situation étudiée dans cet exercice :



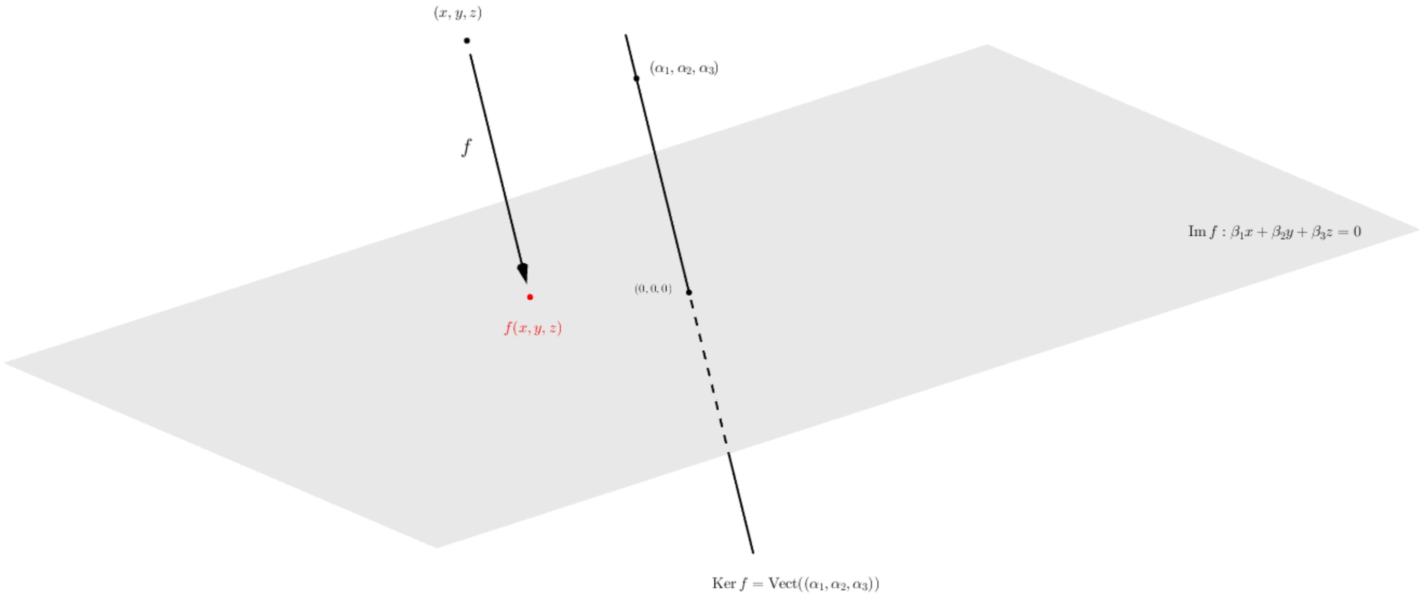
Exercice 5. Donner un exemple de projection $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de rang 2 et qui vérifie :

a. que l'on a l'égalité $f(1,0,2) = f(3,-1,5)$.

b. en plus de la condition du a., que $f(-1,4,1) = (-1,4,1)$.

c. en plus des conditions du a. et du b., que $f^{-1}(\{(2,1,7)\}) \neq \varnothing$.

Solution: Pour résoudre cet exercice il faut avoir en tête le dessin suivant, qui représente la projection f de rang 2 "générale" dans l'espace $\mathbb{R}^3$:



Avec les notations introduites sur le dessin, la matrice A de f en base canonique est égale à :

$$A = I_3 - \frac{1}{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}.$$

a. Les triplets $(1,0,2)$ et $(3,-1,5)$ ont la même image par f si et seulement si leur différence :

$$(3,-1,5) - (1,0,2) = (2,-1,3)$$

appartient à $\operatorname{Ker} f$. Au vu des dimensions, on peut donc affirmer que cette condition est équivalente à dire que :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((2,-1,3)).$$

Pour toute la suite de l'exercice on va donc fixer :

$$\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = -1 \text{ et } \alpha_3 = 3.$$

En prenant alors par exemple pour $\operatorname{Im} f$ le plan vectoriel d'équation $z = 0$, c'est-à-dire en choisissant $\beta_1 = \beta_2 = 0$ et $\beta_3 = 1$ (il faut juste faire attention à prendre un plan vectoriel qui ne contient pas $(2,-1,3)$) on obtient :

$$A = I_3 - \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, l'application suivante convient :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to (x - \tfrac{2}{3}z, y + \tfrac{1}{3}z, 0).$$

b. La condition supplémentaire que $(-1,4,1)$ est fixé par f signifie exactement que ce triplet appartient à $\operatorname{Im} f$, ou, autrement dit, que la relation suiante est satisfaite :

$$-\beta_1 + 4\beta_2 + \beta_3 = 0.$$

En choisissant $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 1$ et $\beta_3 = 0$ on obtient alors :

$$A = I_3 - \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ -12 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, l'application suivante convient :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to \tfrac{1}{7}(-x - 2y, 4x + 8y, -12x - 3y + 7z).$$

c. La condition supplémentaire demande à ce que $(2,1,7)$ ait un antécédent par f, ou, autrement dit, qu'il appartienne à $\operatorname{Im} f$. Au vu du b., cela revient à demander que $\operatorname{Im} f$ soit le plan vectoriel engendré par $(-1,4,1)$ et $(2,1,7)$, c'est-à-dire le plan vectoriel d'équation :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & x \\ 4 & 1 & y \\ 1 & 7 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} z = 27x + 9y - 9z = 9(3x + y - z) = 0.$$

On voit qu'il y a donc une unique application f remplissant toutes les conditions requises, à savoir celle de matrice :

$$A = I_3 - \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ -9 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

en base canonique. Autrement dit l'application suivante convient (et c'est la seule) :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to \tfrac{1}{2}(-4x - 2y + 2z, 3x + 3y - z, -9x - 3y + 5z).$$

Exercice 6. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to \tfrac{1}{11}(4x + 20y + 5z, 6x - 3y + 2z, -3x - 4y - 12z).$$

a. Identifier $f \circ f$. L'application f est-elle une projection ?

b. Etudier l'application linéaire $g = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} + f)$.

c. Déterminer la nature géométrique de f ainsi que ses éléments caractéristiques. *Indication : faire un dessin.*

Solution:

a. La matrice de f en base canonique est :

$$A = \tfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & 20 & 5 \\ 6 & -3 & 2 \\ -3 & -4 & -12 \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct montre alors que :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \quad \text{si bien que} \quad A^2 \neq A.$$

On voit donc que l'application $f \circ f$ est l'identité, et que l'application f n'est pas une projection.

b. La matrice de g en base canonique est :

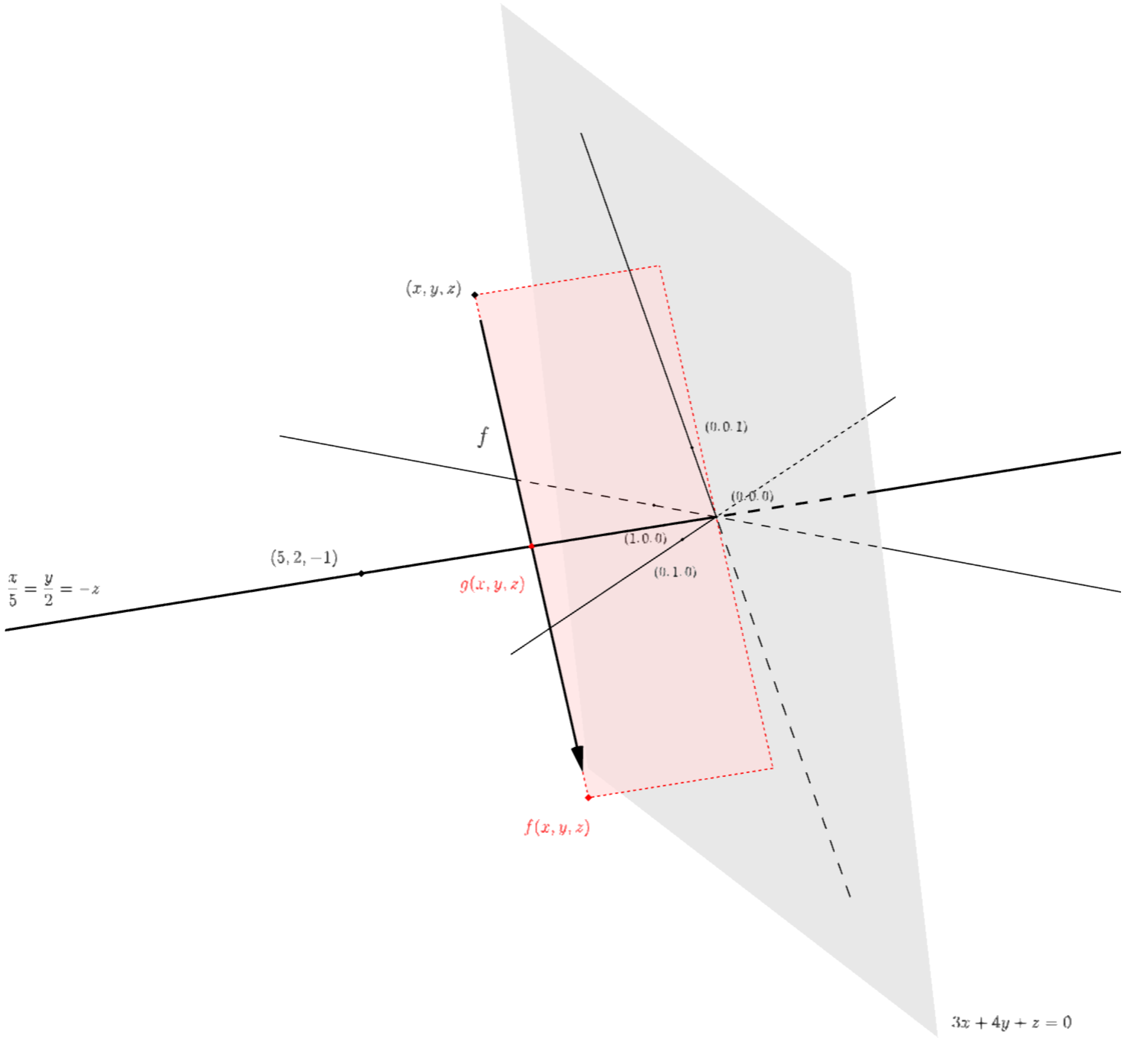
$$B = \frac{1}{2}(I_3 + A) = \tfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 15 & 20 & 5 \\ 6 & 8 & 2 \\ -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 1 (elle est non nulle et ses colonnes sont deux-à-deux proportionnelles) et de trace 1. On en déduit que c'est une matrice de projection. Via la décomposition colonne-ligne :

$$B = \tfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

on voit donc que g est la projection sur la droite vectorielle d'équation $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = -z$ parallèlement au plan vectoriel d'équation $3x + 4y + z = 0$.

c. Géométriquement, le point $g(x, y, z)$ se situe au milieu entre $(0, 0, 0)$ et $f(x, y, z)$. Illustrons alors la situation sur un dessin :



On voit alors que l'application f est donc la symétrie par rapport à la droite vectorielle d'équation $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = -z$ parallèlement au plan vectoriel d'équation $3x + 4y + z = 0$.

Exercice 7. Montrer que pour toute projection $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on a :

$$\operatorname{tr} f = \operatorname{rg} f.$$

Indication : on pourra discuter selon le rang de f.

Solution: Notons A la matrice de f en base canonique et organisons la preuve selon le rang r de f. Tout d'abord, si $r = 0$ alors f est l'application nulle. Elle est donc de trace nulle, de telle sorte que l'on a bien l'égalité :

$$\operatorname{tr} f = r = 0.$$

Supposons à présent que $r = 1$. On a vu au cours qu'une application de rang 1 est une projection si et seulement si elle est de trace 1. On a donc encore bien dans ce cas l'égalité voulue :

$$\operatorname{tr} f = r = 1.$$

Si $r = 2$, on sait que l'application $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - f$, qui a pour matrice $I_3 - A$ en base canonique, est une projection de rang 1. Par conséquent, d'après le cas de rang 1 on a :

$$\underbrace{\mathrm{tr}(I_3 - A)}_{3 - \mathrm{tr}\, A} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tr}\, A = 2.$$

On a donc encore bien dans ce cas l'égalité voulue :

$$\mathrm{tr}\, f = r = 2.$$

Enfin, si $r = 3$ on sait que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ (la seule projection inversible est l'application identité), si bien que :

$$\mathrm{tr}\, f = \mathrm{tr}\, I_3 = 3 = r.$$

Ceci achève la preuve de l'égalité voulue.