Série 18

Exercice 1. On donne l'application linéaire f suivante ainsi que la famille $\mathcal{B}$ d'éléments de $\mathbb{R}^3$:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (2x, 6x - y, -3x + 2y + z) \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = (0, 0, 1), (0, -1, 1), (1, 2, 1).$$

a. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour tout élément $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, écrire la décomposition de v sur $\mathcal{B}$.

b. Déterminer la famille $f(\mathcal{B})$. En déduire les matrices $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_{\text{can}}}$ et $[f]_{\mathcal{B}}$, où on note $\mathcal{B}_{\text{can}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

c. Calculer la matrice $[f]_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}}$.

Solution:

a. Les éléments $(0, 0, 1)$ et $(0, -1, 1)$ ne sont pas proportionnels (ils engendrent un plan vectoriel) et en les combinant on ne peut pas obtenir le triplet $(1, 2, 1)$ (ce triplet ne se trouve pas sur le plan vectoriel engendré par $(0, 0, 1)$ et $(0, -1, 1)$). Par conséquent la famille $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$. La présence de nombreux zéros dans ses éléments rend possible la recherche "à vue" de la décomposition de $v = (x, y, z)$ sur $\mathcal{B}$. On obtient :

$$(x, y, z) = (z - 3x + y)(0, 0, 1) + (-y + 2x)(0, -1, 1) + x(1, 2, 1).$$

En termes de coordonnées, on a donc montré que :

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3x + y + z \\ 2x - y \\ x \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir ces coordonnées on aurait aussi pu introduire la matrice de passage P de $\mathcal{B}_{\text{can}}$ à $\mathcal{B}$ et utiliser la formule de conversion des coordonnées canoniques aux coordonnées en base $\mathcal{B}$ vue au cours. On trouve alors (le calcul de l'inverse n'est pas détaillé ici) :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [v]_{\mathcal{B}} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + y + z \\ 2x - y \\ x \end{pmatrix}.$$

b. La famille $f(\mathcal{B})$ (image de $\mathcal{B}$ par f) est obtenue en appliquant f à chaque élément de $\mathcal{B}$. Un calcul direct donne alors :

$$f(0, 0, 1) = (0, 0, 1), \quad f(0, -1, 1) = (0, 1, -1), \quad f(1, 2, 1) = (2, 4, 2).$$

Passons alors au calcul des matrices demandées. Les colonnes de la matrice $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_{\text{can}}}$ ne sont autres que :

$$[f(0, 0, 1)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [f(0, -1, 1)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [f(1, 2, 1)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, on obtient :

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour le calcul de la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$, on doit maintenant rechercher les coordonnées des éléments de $f(\mathcal{B})$ non plus dans la base canonique mais dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, ou, ce qui revient au même, on doit décomposer $f(\mathcal{B})$ sur $\mathcal{B}$. Or, les calculs faits ci-dessus permettent aisément d'écrire ces décompositions :

$$\begin{cases} f(0, 0, 1) = (0, 0, 1) = 1(0, 0, 1) + 0(0, 1, -1) + 0(1, 2, 1) \\ f(0, -1, 1) = (0, 1, -1) = 0(0, 0, 1) - (0, 1, -1) + 0(1, 2, 1) \\ f(1, 2, 1) = (2, 4, 2) = 0(0, 0, 1) + 0(0, 1, -1) + 2(1, 2, 1) \end{cases}$$

Les colonnes de la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ sont donc :

$$[f(0, 0, 1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [f(0, -1, 1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [f(1, 2, 1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

c. Calculons la famille $f(\mathcal{B}_{\text{can}})$ (image par f de la base canonique de $\mathbb{R}^3$) :

$$f(1,0,0) = (2,6,-3), \quad f(0,1,0) = (0,-1,2), \quad f(0,0,1) = (0,0,1).$$

En utilisant la formule générale trouvée au a. pour les coordonnées en base $\mathcal{B}$ on obtient alors :

$$[f(1,0,0)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [f(0,1,0)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [f(0,0,1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On vient en fait d'identifier les colonnes de la matrice recherchée. Par conséquent :

$$[f]_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. On donne l'application linéaire f suivante ainsi que la famille $\mathcal{B}$ d'éléments de $\mathbb{R}^3$:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to (x+y+3z)(1,2,-1) \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = (2,4,-2), (0,1,0), (0,0,1).$$

a. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour tout élément $v = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$, écrire la décomposition de v sur $\mathcal{B}$.

b. Calculer la famille $f(\mathcal{B})$ et la décomposer sur $\mathcal{B}$. En déduire la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ représentant f en base $\mathcal{B}$.

c. Vérifier vos résultats du a. et b. en testant la validité de la formule $[f(v)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}\,[v]_{\mathcal{B}}$.

Solution:

a. Les éléments $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ ne sont pas proportionnels (ils engendrent un plan vectoriel) et en les combinant on ne peut pas obtenir le triplet $(2,4,-2)$ (ce triplet ne se trouve pas sur le plan vectoriel engendré par $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$). Par conséquent la famille $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$. La présence de nombreux zéros dans ses éléments rend possible la recherche "à vue" de la décomposition de $v = (x,y,z)$ sur $\mathcal{B}$. On obtient :

$$(x,y,z) = \tfrac{x}{2}(2,4,-2) + (y-2x)(0,1,0) + (z+x)(0,0,1).$$

En termes de coordonnées, on a donc montré que :

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ y-2x \\ z+x \end{pmatrix}.$$

b. La famille $f(\mathcal{B})$ (image de $\mathcal{B}$ par f) est obtenue en appliquant f à chaque élément de $\mathcal{B}$:

$$\underbrace{f(2,4,-2) = (0,0,0)}_{(2+4+3\cdot(-2))(1,2,-1)}, \quad \underbrace{f(0,1,0) = (1,2,-1)}_{(0+1+3\cdot 0)(1,2,-1)}, \quad \underbrace{f(0,0,1) = (3,6,-3)}_{(0+0+3\cdot 1)(1,2,-1)}$$

On obtient alors les décompositions suivantes :

$$\begin{cases} f(2,4,-2) = 0(2,4,-2) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1) \\ f(0,1,0) = \frac{1}{2}(2,4,-2) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1) \\ f(0,0,1) = \frac{3}{2}(2,4,-2) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1) \end{cases}$$

La matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ représentant f en base $\mathcal{B}$ contient les coefficients trouvés dans ces décompositions écrits en colonnes (c'est la matrice "$[f(\mathcal{B})]_{\mathcal{B}}$", dont les colonnes sont les coordonnées des éléments de $f(\mathcal{B})$ en base $\mathcal{B}$). On obtient :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c. Calculons $[f(v)]_{\mathcal{B}}$ en décomposant $f(v)$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$f(x,y,z) = (x+y+3z)(1,2,-1) = \tfrac{1}{2}(x+y+3z)(2,4,-2) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1).$$

On en déduit :

$$[f(v)]_{\mathcal{B}} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x+y+3z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'après les résultats du a. et du b., on trouve aussi :

$$[f]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ y-2x \\ z+x \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} y-2x+3(z+x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x+y+3z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La formule donnée dans l'énoncé est donc bien vérifiée ici.

Exercice 3. Décrire le noyau et l'image de l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (x - z, y - x, z - y).$$

Dans chacun des cas suivants, déterminer alors si possible des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant la condition donnée.

a. $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b. $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c. $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Indication : on commencera par écrire la décomposition voulue de $f(\mathcal{B})$ dans $\mathcal{B}'$.

Solution: Le noyau de f est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équations $x = y = z$. C'est donc la droite vectorielle engendrée par $(1, 1, 1)$:

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1, 1, 1)).$$

L'application f est de rang 2. Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} f$ est un plan vectoriel, dont on obtient une base à chaque fois que l'on produit par f deux éléments de $\mathbb{R}^3$ qui ne sont pas proportionnels, comme par exemple :

$$f(1, 0, 0) = (1, -1, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 1, 0) = (0, 1, -1).$$

On voit donc que le plan vectoriel $\operatorname{Im} f$ a pour équation :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} z = x + y + z = 0.$$

a. La question posée ici demande de trouver deux bases $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$ et $\mathcal{B}' = v_1', v_2', v_3'$ de $\mathbb{R}^3$ telles que :

$$\underbrace{[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{"[f(\mathcal{B})]_{\mathcal{B}'}"} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(v_1) = v_1' \\ f(v_2) = v_2' \\ f(v_3) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

La dernière condition demande à v_3 d'être dans le noyau de f, et donc d'être un multiple scalaire de $(1, 1, 1)$. Posons alors par exemple :

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (1, 1, 1).$$

La famille $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$: les deux premiers éléments ne sont pas proportionnels et le troisième n'en est pas combinaison linéaire. Pour construire cette famille, on a choisi pour v_3 un élément particulier (non nul) dans le noyau de f, que l'on a ensuite complété (en allant "au plus simple") en une base de $\mathbb{R}^3$. Posons ensuite :

$$v_1' = \underbrace{(1, -1, 0)}_{f(v_1)}, \quad v_2' = \underbrace{(0, 1, -1)}_{f(v_2)}, \quad v_3' = (1, 0, 0).$$

Définie de cette manière la famille $\mathcal{B}'$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$: les deux premiers éléments ne sont pas proportionnels et appartiennent au plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$ (c'est-à-dire à $\operatorname{Im} f$) et le dernier n'en est pas combinaison linéaire, puisqu'il est situé en dehors de ce plan vectoriel. Par ailleurs, les relations écrites ci-dessus sont bien vérifiées, si bien que la matrice $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est bien celle demandée.

b. La question posée ici demande de trouver deux bases $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$ et $\mathcal{B}' = v_1', v_2', v_3'$ de $\mathbb{R}^3$ telles que :

$$\underbrace{[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{"[f(\mathcal{B})]_{\mathcal{B}'}"} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(v_1) = (0, 0, 0) \\ f(v_2) = 2v_1' \\ f(v_3) = -v_2'. \end{cases}$$

La première condition demande à v_1 d'être dans le noyau de f, et donc d'être un multiple scalaire de $(1, 1, 1)$. Posons alors par exemple :

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 0, 0), \quad v_3 = (0, 1, 0).$$

La famille $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$: les deux derniers éléments ne sont pas proportionnels et le premier n'en est pas combinaison linéaire. Pour construire cette famille, on a choisi pour v_1 un élément particulier (non nul) dans le noyau de f, que l'on a ensuite complété (en allant "au plus simple") en une base de $\mathbb{R}^3$. Posons ensuite :

$$v_1' = \underbrace{(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0)}_{\frac{1}{2}f(v_2)}, \quad v_2' = \underbrace{(0, -1, 1)}_{-f(v_3)}, \quad v_3' = (1, 0, 0).$$

Définie de cette manière la famille $\mathcal{B}'$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$: les deux premiers éléments ne sont pas proportionnels et appartiennent au plan vectoriel d'équation $x+y+z=0$ (c'est-à-dire à $\operatorname{Im} f$) et le dernier n'en est pas combinaison linéaire, puisqu'il est situé en dehors de ce plan vectoriel. Par ailleurs, les relations écrites ci-dessus sont bien vérifiées, si bien que la matrice $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est bien celle demandée.

c. Il est ici impossible de trouver de telles bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. En effet, le rang de $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est égal à 2 (et ce peu importe le choix de bases), et la matrice proposée ici est de rang 1.

Exercice 4. On donne l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} \mathcal{B} = (11,-29,34),(20,31,-57),(-14,-35,61) \\ \mathcal{B}' = (3,-5,1),(2,0,3),(4,7,2). \end{cases}$$

On ne demande pas de vérifier que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$.

a. Quel est le rang de f ?
b. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
c. Donner une (ou des) équation(s) de $\operatorname{Im} f$.

Solution: Notons :

$$\underbrace{v_1 = (11,-29,34),\ v_2 = (20,31,-57),\ v_3 = (-14,-35,61)}_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \underbrace{v_1' = (3,-5,1),\ v_2' = (2,0,3),\ v_3' = (4,7,2)}_{\mathcal{B}'}.$$

a. De manière générale, on sait que le rang de f est égal à celui de toute matrice qui la représente (indépendamment du choix des bases utilisées). En particulier le rang de f est celui de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Or, dans cette matrice, les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles et les deux dernières sont opposées. Cette matrice est donc de rang 2, si bien que f est également de rang 2.

b. On a observé au a. que la somme des deux dernières colonnes de la matrice $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est nulle, ou, autrement dit :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De cette égalité matricielle on peut alors déduire que l'élément v de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ou, autrement dit,} \qquad v = 0\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + 1\cdot v_3 = (6,-4,4)$$

est dans le noyau de f. En effet, pour cet élément v on obtient :

$$[f(v)]_{\mathcal{B}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}}_{[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{[v]_{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(v) = (0,0,0)}_{v \in \operatorname{Ker} f}.$$

Toujours d'après le a. on sait aussi que $\operatorname{Ker} f$ est une droite vectorielle. On voit donc que $(6,-4,4)$ en est une base (et donc aussi $(3,-2,2)$, ou tout multiple scalaire non nul de $(6,-4,4)$).

Remarque : attention de ne pas déduire de l'égalité matricielle ci-dessus que $(0,1,1)$ est dans le noyau de f, comme ce serait le cas si f était l'application :

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to (2x, -3x+y-z, x+2y-2z).$$

c. Rappelons que la matrice représentative de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ contient dans ses colonnes les coordonnées des éléments de $f(\mathcal{B})$ en base $\mathcal{B}'$. Autrement dit, on a :

$$\begin{cases} f(v_1) = 2v_1' - 3v_2' + v_3' = 2(3,-5,1) - 3(2,0,3) + (4,7,2) = (4,-3,-5) \\ f(v_2) = v_2' + 2v_3' = (2,0,3) + 2(4,7,2) = (10,14,7) \\ f(v_3) = -v_2' - 2v_3' = -(2,0,3) - 2(4,7,2) = (-10,-14,-7). \end{cases}$$

Ces trois éléments appartiennent à $\operatorname{Im} f$ (puisqu'ils sont "produits" par f). Par ailleurs, on sait d'après le a. que f est de rang 2, si bien que $\operatorname{Im} f$ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On en déduit qu'il admet pour équation :

$$\begin{vmatrix} x & 4 & 10 \\ y & -3 & 14 \\ z & -5 & 7 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} -3 & 14 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ -3 & 14 \end{vmatrix} = 49x - 78y + 86z = 0$$

Remarque : comme ci-dessus, attention de ne pas déduire de la matrice $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ que $(2,-3,1)$, $(0,1,2)$ et $(0,-1,2)$ appartiennent à l'image de f, comme ce serait le cas si f était l'application :

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to (2x, -3x+y-z, x+2y-2z).$$

Ce sont pluôt ici les éléments de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées en base $\mathcal{B}'$ (et non en base canonique) sont :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

qui se trouvent dans l'image de f.

Exercice 5. Décrire le noyau et l'image de l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to (3x+2y+z, -3x+z, -y-z).$$

Si c'est possible, déterminer alors une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant la condition donnée.

a. La dernière colonne de la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ est nulle.

b. Même condition qu'au a. et, en supplément, la dernière ligne de la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ est nulle.

c. Mêmes conditions qu'au b. et, en supplément, la première colonne de la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ est $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Solution: Le noyau de f est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ formé des solutions du système :

$$\begin{cases} 3x+2y+z=0 \\ -3x+z=0 \\ -y-z=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z=3x \\ y=-3x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) = x(1,-3,3).$$

C'est donc la droite vectorielle engendrée par $(1,-3,3)$:

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1,-3,3)).$$

L'application f est de rang 2. Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} f$ est un plan vectoriel, dont on obtient une base à chaque fois que l'on produit par f deux éléments de $\mathbb{R}^3$ qui ne sont pas proportionnels, comme par exemple :

$$f(1,0,0) = (3,-3,0) = 3(1,-1,0) \quad \text{et} \quad f(0,1,0) = (2,0,-1).$$

On voit donc que le plan vectoriel $\operatorname{Im} f$ admet $(1,-1,0),(2,0,-1)$ pour base et possède donc pour équation :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & -1 & 0 \\ z & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} z = x+y+2z = 0.$$

a. Notons v_1, v_2, v_3 les éléments de la base $\mathcal{B}$ recherchée. La dernière colonne de $[f]_{\mathcal{B}}$ est nulle si et seulement si :

$$\underbrace{[f(v_3)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{3ème colonne de } [f]_{\mathcal{B}}} \quad \Leftrightarrow \quad f(v_3) = (0,0,0) \quad \Leftrightarrow \quad v_3 \in \operatorname{Ker} f.$$

Posons alors :

$$v_1 = (1,0,0), \quad v_2 = (0,1,0), \quad v_3 = (1,-3,3).$$

La famille $\mathcal{B}$ définie de cette manière est bien une base de $\mathbb{R}^3$: les deux premiers éléments ne sont pas proportionnels et le troisième n'en est pas combinaison linéaire. Par ailleurs, d'après la description du noyau de f obtenue ci-dessus on voit que $\mathcal{B}$ vérifie bien la condition proposée ici.

b. La question posée revient à demander à ce que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ soit de la forme suivante :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \beta & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour certains réels α, β, γ et δ. De manière équivalente, on souhaite satisfaire des relations du type :

$$\begin{cases} f(v_1) = \alpha v_1 + \beta v_2 \\ f(v_2) = \gamma v_1 + \delta v_2 \\ f(v_3) = (0,0,0). \end{cases}$$

Les deux premières relations seront vérifiées si v_1, v_2 forment une base de $\operatorname{Im} f$: en effet, dans ce cas $f(v_1)$ et $f(v_2)$ s'écriront automatiquement comme combinaison linéaire de v_1 et v_2, puisqu'ils appartiennent à $\operatorname{Im} f$. Posons alors :

$$v_1 = (1,-1,0), \quad v_2 = (2,0,-1), \quad v_3 = (1,-3,3).$$

La famille $\mathcal{B}$ ainsi définie est bien base de $\mathbb{R}^3$: les deux premiers éléments ne sont pas proportionnels et engendrent le plan vectoriel d'équation $x + y + 2z = 0$, sur lequel le troisième élément ne se trouve pas. Elle vérifie bien des relations du type ci-dessus et répond donc bien au problème posé, d'après l'argument donné ci-dessus. Ce n'est pas demandé, mais cherchons explicitement la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$. Pour cela, calculons la famille $f(\mathcal{B})$ et décomposons-la sur $\mathcal{B}$. On trouve :

$$\begin{cases} f(1,-1,0) = (1,-3,1) = 3(1,-1,0) - (2,0,-1) \\ f(2,0,-1) = (5,-7,1) = 7(1,-1,0) - (2,0,-1) \\ f(v_3) = (0,0,0). \end{cases}$$

si bien que :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c. En reprenant les notations ci-dessus, on voit que l'on souhaite maintenant satisfaire des relations du type :

$$\begin{cases} f(v_1) = v_2 \\ f(v_2) = \gamma v_1 + \delta v_2 \\ f(v_3) = (0,0,0) \end{cases}$$

(correspondant au cas où $\alpha = 0$ et $\beta = 1$). Posons alors :

$$v_1 = (1,-1,0), \quad \underbrace{v_2 = (1,-3,1),}_{f(v_1)} \quad v_3 = (1,-3,3).$$

La famille $\mathcal{B}$ ainsi définie est bien base de $\mathbb{R}^3$: les deux premiers éléments ne sont pas proportionnels et engendrent le plan vectoriel d'équation $x + y + 2z = 0$ (c'est-à-dire $\operatorname{Im} f$), sur lequel le troisième élément ne se trouve pas. Calculons alors la famille $f(\mathcal{B})$ et décomposons-la sur $\mathcal{B}$. On trouve :

$$\begin{cases} f(1,-1,0) = (1,-3,1) \\ f(1,-3,1) = (-2,-2,2) = -4(1,-1,0) + 2(1,-3,1) \\ f(v_3) = (0,0,0). \end{cases}$$

si bien que :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a bien la forme voulue.

Exercice 6. On donne une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ainsi qu'une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. On suppose que f est inversible.

a. Montrer que la famille $f(\mathcal{B})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour tout élément v de $\mathbb{R}^3$, calculer aussi $[f(v)]_{f(\mathcal{B})}$ en fonction de $[v]_{\mathcal{B}}$.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

b. $[f]_{\mathcal{B},f(\mathcal{B})} = I_3$ c. $[f]_{f(\mathcal{B})} = [f]_{\mathcal{B}}$ d. $[f]_{f(\mathcal{B}),\mathcal{B}} = [f \circ f]_{\mathcal{B}}$.

Solution:

a. Notons :
$$\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3 \quad \text{et} \quad f(\mathcal{B}) = v_1', v_2', v_3', \quad \text{où} \quad v_1' = f(v_1),\ v_2' = f(v_2) \text{ et } v_3' = f(v_3).$$
Pour voir que $f(\mathcal{B})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ montrons par exemple que :
$$\mathrm{Vect}(v_1', v_2', v_3') = \mathbb{R}^3.$$
Donnons-nous un élément w de $\mathbb{R}^3$ et cherchons à prouver qu'il peut s'écrire comme une combinaison linéaire de v_1', v_2' et v_3'. Pour cela, considérons $v = f^{-1}(w)$ l'unique antécédent de w par f (ou, ce qui revient au même, l'image de w par l'application inverse f^{-1}) et décomposons-le sur la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$:
$$v = t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3.$$
En appliquant f on obtient alors, puisque celle-ci est linéaire :
$$w = f(v) = f(t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3) = t_1 f(v_1) + t_2 f(v_2) + t_3 f(v_3) = t_1 v_1' + t_2 v_2' + t_3 v_3'.$$
Ceci achève de montrer que tout élément de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire des 3 éléments de la famille $f(\mathcal{B})$, si bien que celle-ci est bien une base de $\mathbb{R}^3$. En plus, nous avons établi que les coordonnées de $w = f(v)$ dans la base $f(\mathcal{B})$ sont égales à celles de v dans la base $\mathcal{B}$:
$$[f(v)]_{f(\mathcal{B})} = [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}.$$

b. Les colonnes de la matrice $[f]_{\mathcal{B}, f(\mathcal{B})}$ sont les coordonnnées de $f(v_1), f(v_2)$ et $f(v_3)$ dans la base $f(\mathcal{B})$. On trouve :
$$[f(v_1)]_{f(\mathcal{B})} = \underbrace{[v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{car } v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3},\ [f(v_2)]_{f(\mathcal{B})} = \underbrace{[v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{car } v_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3},\ [f(v_3)]_{f(\mathcal{B})} = \underbrace{[v_3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{car } v_3 = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3}.$$
En mettant côte-à-côte ces colonnes on trouve maintenant :
$$[f]_{\mathcal{B}, f(\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$
L'affirmation proposée est donc vraie.

c. Les colonnes de la matrice $[f]_{f(\mathcal{B})}$ sont les coordonnnées de $f(v_1'), f(v_2')$ et $f(v_3')$ dans la base $f(\mathcal{B})$. Par exemple :
$$\underbrace{[f(v_1')]_{f(\mathcal{B})}}_{\text{première colonne de } [f]_{f(\mathcal{B})}} = [v_1']_{\mathcal{B}} = [f(v_1)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}[v_1]_{\mathcal{B}} = \underbrace{[f]_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{première colonne de } [f]_{\mathcal{B}}}.$$
En raisonnant de même pour la deuxième et la troisième colonne, on voit que les colonnes $[f]_{f(\mathcal{B})}$ et $[f]_{\mathcal{B}}$ sont les mêmes. Autrement dit, ces deux matrices sont égales. L'affirmation proposée est donc vraie.

d. Les colonnes de la matrice $[f]_{f(\mathcal{B}), \mathcal{B}}$ sont les coordonnées de $f(v_1'), f(v_2')$ et $f(v_3')$ dans la base $\mathcal{B}$. Par exemple :
$$\underbrace{[f(v_1')]_{\mathcal{B}}}_{\text{première colonne de } [f]_{f(\mathcal{B}),\mathcal{B}}} = [f(f(v_1))]_{\mathcal{B}} = [(f \circ f)(v_1)]_{\mathcal{B}} = [f \circ f]_{\mathcal{B}}[v_1]_{\mathcal{B}} = \underbrace{[f \circ f]_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{première colonne de } [f \circ f]_{\mathcal{B}}}.$$
En raisonnant de même pour la deuxième et la troisième colonne, on voit que les colonnes $[f]_{f(\mathcal{B}), \mathcal{B}}$ et $[f \circ f]_{\mathcal{B}}$ sont les mêmes. Autrement dit, ces deux matrices sont égales. L'affirmation proposée est donc vraie.

Exercice 7. On considère les applications linéaires $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définies par :
$$f(x, y, z) = (-16x + 8y - 8z, 10x - 5y + 5z, 2x - y + z) \quad \text{et} \quad g(x, y, z) = (-21x + 3y - 13z, 13x - 2y + 8z, 3x + 2z).$$

a. Déterminer les noyaux de f et g.

b. Trouver, si possible, deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :
$$[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [g]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indication : on commencera par écrire les décompositions voulues de $f(\mathcal{B})$ et $g(\mathcal{B})$ dans $\mathcal{B}'$.

Solution:

a. En réécrivant f sous la forme :

$$f(x,y,z) = (2x - y + z)(-8,5,1)$$

on voit que f est de rang 1 et que son noyau est le plan vectoriel d'équation $2x - y + z = 0$. Cherchons à écrire une expression similaire pour g :

$$g(x,y,z) = x\underbrace{(-21,13,3)}_{g(1,0,0)} + y\underbrace{(3,-2,0)}_{g(0,1,0)} + z\underbrace{(-13,8,2)}_{g(0,0,1)}.$$

Il est clair que les triplets en facteur de x et z ne sont pas proportionnels. On sait donc que g est de rang au moins égal à 2. Pour décider si ce rang vaut 2 ou 3, on cherche à combiner ces deux triplets pour retrouver celui du milieu. Afin de créer un zéro en troisième position on est alors naturellement conduit à considérer :

$$2(-21,13,3) - 3(-13,8,2) = (-3,2,0) = -(3,-2,0).$$

Cela nous permet de réécrire g sous la forme :

$$g(x,y,z) = x(-21,13,3) + y(-2(-21,13,3) + 3(-13,8,2)) + z(-13,8,2) = (x-2y)(-21,13,3) + (3y+z)(-13,8,2).$$

Sous cette forme, on voit que le noyau de g est la droite vectorielle d'équation $\frac{x}{2} = y = -\frac{z}{3}$ (qui est engendrée par $(2,1,-3)$).

b. Il s'agit de trouver deux bases $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$ et $\mathcal{B}' = v'_1, v'_2, v'_3$ de $\mathbb{R}^3$ telles que :

$$\begin{cases} f(v_1) = v'_1 \\ f(v_2) = 0 \\ f(v_3) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(v_1) = v'_1 \\ g(v_2) = 0 \\ g(v_3) = v'_3. \end{cases}$$

Cherchons à satisfaire ces conditions. Tout d'abord, comme v_2 doit être dans le noyau de g (deuxième condition dans le deuxième système), au vu du résultat trouvé en a., on est amené à poser $v_2 = (2,1,-3)$ (à un multiple scalaire près). On peut alors vérifier directement que $f(v_2) = (0,0,0)$ (deuxième condition dans le premier système). Les premières conditions des deux systèmes impliquent que v_1 a même image par f et g, c'est-à-dire qu'il appartient à $\mathrm{Ker}(f-g)$. Les coordonnées de v_1 sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} -16x + 8y - 8z = -21x + 3y - 13z \\ 10x - 5y + 5z = 13x - 2y + 8z \\ 2x - y + z = 3x + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 5y + 5z = 0 \\ -3x - 3y - 3z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x + y + z = 0.$$

Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(f-g)$ est donc le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$. Remarquons que les coordonnées de v_2 vérifient cette équation. Ce n'est pas surprenant, puisqu'on a déjà vu que :

$$f(v_2) = g(v_2) = (0,0,0),$$

si bien que v_2 se trouve dans ce plan vectoriel. Choisissons alors pour v_1 un autre élément de $\mathrm{Ker}(f-g)$, qui n'est pas lié à v_2, en posant par exemple $v_1 = (1,-1,0)$. La valeur de v'_1 est donc maintenant imposée :

$$v'_1 = f(v_1) = g(v_1) = (-24,15,3).$$

D'après la troisième condition du premier système, v_3 appartient au noyau de f. En utilisant l'équation trouvée en a., posons alors par exemple $v_3 = (0,1,1)$ (on fait attention à ne pas prendre v_3 lié à v_2, car ce dernier se trouve aussi dans le noyau de f). La dernière condition impose alors la valeur de v'_3 :

$$v'_3 = g(v_3) = g(0,1,1) = (-10,6,2).$$

Le seul élément qui n'a pas encore été défini est v'_2. Aucune condition ne semble imposée sur lui, mise à part le fait qu'il forme avec v'_1 et v'_3 une base de $\mathbb{R}^3$. Posons alors $v'_2 = (1,0,0)$ (de cette façon, il semble effectivement impossible de combiner v'_1 et v'_2, qui ne sont visiblement pas proportionnels, pour obtenir v'_3). A présent, récapitulons notre résultat. On pose :

$$\mathcal{B} = (1,-1,0),\ (2,1,-3),\ (0,1,1) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = (-24,15,3),\ (1,0,0),\ (-10,6,2).$$

On vérifie que ces familles sont des bases de $\mathbb{R}^3$, par exemple en calculant les déterminants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} -24 & 1 & -10 \\ 15 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 15 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -12 \neq 0.$$

Par ailleurs, les conditions désirées sont satisfaites pour ces bases (on a tout fait pour ça !), car :

$$\begin{cases} f(1,-1,0) = (-24,15,3) \\ f(2,1,-3) = (0,0,0) \\ f(0,1,1) = (0,0,0) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(1,-1,0) = (-24,15,3) \\ g(2,1,-3) = (0,0,0) \\ g(0,1,1) = (-10,6,2). \end{cases}$$