Série 17

Exercice 1. On donne les applications linéaires :

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (3x + y - z, 2x - 5y, y + 2z) \quad \text{et} \quad h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (x + z, y, 4x + 3y - z).$$

Dans chaque cas, donner l'expression de $f(x, y, z)$ en fonction de x, y et z, où f est l'application linéaire donnée :

a. $f = 5g$ b. $f = 2g + 3h$ c. $f = g \circ h - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

Solution: Notons B et C les matrices de f et g en base canonique :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Par définition de la multiplication scalaire sur une application linéaire, on a ici :

$$f(x, y, z) = 5g(x, y, z) = 5(3x + y - z, 2x - 5y, y + 2z) = (15x + 5y - 5z, 10x - 25y, 5y + 10z).$$

Alternativement, on peut aussi calculer la matrice A de f en base canonique :

$$A = 5B = 5\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 & -5 \\ 10 & -25 & 0 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

puis écrire la formule définissant f en utilisant la matrice que l'on a trouvée. On retombe évidemment sur la même formule.

b. Par définition de la multiplication scalaire et de l'addition sur les applications linéaires, on a ici :

$$f(x, yz) = (2g + 3h)(x, y, z) = 2g(x, y, z) + 3h(x, y, z) = 2(3x + y - z, 2x - 5y, y + 2z) + 3(x + z, y, 4x + 3y - z) = \cdots$$

$$\cdots = (6x + 2y - 2z, 4x - 10y, 2y + 4z) + (3x + 3z, 3y, 12x + 9y - 3z) = (9x + 2y + z, 4x - 7y, 12x + 11y + z).$$

Là aussi on peut commencer par calculer la matrice A de f en base canonique :

$$A = 2B + 3C = 2\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 4 & -7 & 0 \\ 12 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

puis écrire la formule définissant f en utilisant la matrice que l'on a trouvée. On retombe évidemment sur la même formule.

c. Par définition de la composition, on a :

$$(g \circ h)(x, y, z) = g(h(x, y, z)) = g(x + z, y, 4x + 3y - z) = (3(x + z) + y - (4x + 3y - z), 2(x + z) - 5y, y + 2(4x + 3y - z)) = \cdots$$

$$\cdots = (-x - 2y + 4z, 2x - 5y + 2z, 8x + 7y - 2z).$$

On obtient alors :

$$f(x, y, z) = (g \circ h - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(x, y, z) = (g \circ h)(x, y, z) - (x, y, z) = (-x - 2y + 4z, 2x - 5y + 2z, 8x + 7y - 2z) - (x, y, z) = \cdots$$

$$\cdots = (-2x - 2y + 4z, 2x - 6y + 2z, 8x + 7y - 3z).$$

Un raisonnement matriciel est bien évidemment possible ici aussi :

$$A = BC - I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & -5 & 2 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 2 & -6 & 2 \\ 8 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

On retombe bien sûr sur la même formule.

Exercice 2. Déterminer une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de rang 1 telle que :

$$\mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Vect}((3,1,-4))\,, \qquad \text{où} \qquad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to (-9x+3y-6z, 6x-2y+4z, 15x-5y+10z).$$

Indication : on pourra utiliser des décompositions colonnes-lignes.

Solution: La matrice de g en base canonique est :

$$B = \begin{pmatrix} -9 & 3 & -6 \\ 6 & -2 & 4 \\ 15 & -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, g est de rang 1. Elle se décompose sous la forme :

$$g(x,y,z) = (3x-y+2z)(-3,2,5).$$

Recherchons alors via sa matrice A en base canonique une application linéaire f vérifiant les conditions de l'énoncé. Comme f est de rang 1, la matrice A doit se décomposer comme produit d'une colonne et d'une ligne :

$$A = C_1 L_1.$$

Par ailleurs, $f+g$ doit également être de rang 1, si bien que la matrice $A+B$ doit aussi se décomposer comme produit d'une colonne et d'une ligne. De plus la colonne peut être prise égale aux coordonnées de $(3,1,-4)$ en base canonique, puisque l'on sait que ce triplet forme une base de $\mathrm{Im}(f+g)$. En d'autre termes on peut écrire une décomposition du type :

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} L_2.$$

Matriciellement, le problème posé consiste donc à trouver une colonne C_1 et des lignes L_1 et L_2 telles que :

$$C_1 L_1 + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} L_2.$$

Posons alors :

$$L_1 = L_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Clairement, l'égalité matricielle ci-dessus est vérifiée :

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice en base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire l'application définie par :

$$f(x,y,z) = (3x-y+2z)(6,-1,-9)$$

est donc solution du problème posé. Elle est bien de rang 1, et l'application :

$$f+g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \to (3x-y+2z)(3,1,-4)$$

a bien pour image la droite vectorielle engendrée par $(3,1,-4)$.

Exercice 3. On suppose donnée une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions suivantes :

$$f \circ f = 0 \qquad \text{et} \qquad f(2,3,5) = f(-1,0,3) = (1,2,-1).$$

a. Déterminer le rang de f puis une base de $\mathrm{Im}\, f$.

b. Décrire $\mathrm{Ker}\, f$ par une (ou des) équation(s).

c. Déterminer l'expression de $f(x,y,z)$ en fonction de x,y et z.

Solution:

a. L'hypothèse que $f\circ f$ est l'application nulle entraine que $\operatorname{Im} f$ est contenu dans $\operatorname{Ker} f$. En effet :

$$\underbrace{v}_{f(x,y,z)} \in \operatorname{Im} f \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(v)}_{f(f(x,y,z))} = (0,0,0) \quad \Rightarrow \quad v\in \operatorname{Ker} f.$$

La dimension de $\operatorname{Im} f$ est donc inférieure ou égale à la dimension de $\operatorname{Ker} f$. Or :

$$\dim(\operatorname{Im} f) = \operatorname{rg} f \quad \text{et} \quad \dim(\operatorname{Ker} f) = 3 - \operatorname{rg} f,$$

la dernière égalité ayant lieu par le théorème du rang. On en déduit alors :

$$\operatorname{rg} f \leqslant 3 - \operatorname{rg} f$$

ce qui, du fait que le rang est un entier, montre que f est de rang 0 ou 1. Comme $\operatorname{Im} f$ n'est pas le sous-espace nul (puisqu'il contient $(1,2,-1)$), on voit donc que $\operatorname{rg} f = 1$: $\operatorname{Im} f$ est une droite vectorielle, à savoir celle engendrée par $(1,2,-1)$ et $\operatorname{Ker} f$ est un plan vectoriel.

b. On a vu au a. que $\operatorname{Ker} f$ est un plan vectoriel qui contient :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((1,2,-1)).$$

En particulier, le triplet $(1,2,-1)$ est dans le noyau de f. Par ailleurs, en utilisant la donnée de l'énoncé et la linéarité de f on trouve :

$$f(2,3,5) - f(-1,0,3) = f(3,3,2) = (0,0,0).$$

Autrement dit, $(3,3,2)$ est aussi élément du noyau de f. On voit donc que $\operatorname{Ker} f$ a pour équation :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y & 2 & 3 \\ z & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} z = 7x - 5y - 3z = 0.$$

c. L'application f étant de rang 1, on sait, au vu des résultats du a. et du b., qu'elle possède une expression du type :

$$f(x,y,z) = \alpha(7x-5y-3z)(1,2,-1)$$

où α est un réel non nul. On obtient alors :

$$f(-1,0,3) = -16\alpha(1,2,-1) = (1,2,-1) \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\tfrac{1}{16}.$$

Autrement dit, f est donnée par la formule :

$$f(x,y,z) = \tfrac{1}{16}(7x-5y-3z)(-1,-2,1).$$

Exercice 4. Est-il vrai ou faux de dire que, pour toutes applications linéaires $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ on a :

a. $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g\circ f)$?

b. $\operatorname{Im}(f\circ g) \subset \operatorname{Im} g$?

c. $\operatorname{Ker}(f+g)\cap \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$?

d. $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f \Rightarrow \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$?

Solution:

a. C'est vrai. En effet :

$$v\in \operatorname{Ker} f \;\Rightarrow\; f(v) = (0,0,0) \;\Rightarrow\; \underbrace{g(f(v))}_{(g\circ f)(v)} = g(0,0,0) = (0,0,0) \;\Rightarrow\; v \in \operatorname{Ker}(g\circ f).$$

Tout élément du noyau de f appartient donc au noyau de $g\circ f$, ce qui montre l'inclusion voulue.

b. C'est faux. En effet, prenons par exemple :

$$g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ (x,y,z)\to(x,0,0) = x(1,0,0).$$

L'application linéaire g ainsi choisie est de rang 1 et son image est la droite vectorielle engendrée par $(1,0,0)$. Lorsque l'on compose par f, on obtient l'application :

$$f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to f(x,0,0) = xf(1,0,0).$$

Si l'on choisit f de sorte à ce que $f(1,0,0)$ soit non proportionnel à $(1,0,0)$, on aura alors que $f \circ g$ est aussi de rang 1 et :

$$\operatorname{Im}(f \circ g) = \operatorname{Vect}(f(1,0,0)) \not\subset \operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}((1,0,0)).$$

Prenons alors par exemple :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to (0,x,0) = x(0,1,0)$$

pour laquelle $f(1,0,0) = (0,1,0)$ n'est pas proportionnel à $(1,0,0)$.

c. C'est vrai. En effet, donnons-nous un élément v de $\mathbb{R}^3$ qui est à la fois dans le noyau de $f+g$ et dans celui de g. On a donc :

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v) = (0,0,0) \quad \text{et} \quad g(v) = (0,0,0),$$

d'où l'on déduit par soustraction que :

$$f(v) = (0,0,0).$$

Autrement dit, v appartient au noyau de f. Ceci achève de prouver l'inclusion désirée.

d. C'est vrai. Pour le montrer, supposons que :

$$\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f$$

et donnons-nous un élément w de $\operatorname{Im} g$. Notre but est de montrer que w appartient aussi à $\operatorname{Im} f$. Tout d'abord, on sait que w peut s'écrire sous la forme :

$$w = g(v)$$

avec $v \in \mathbb{R}^3$. Par ailleurs, l'hypothèse que :

$$\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f$$

nous assure que l'on peut trouver un élément v' de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\underbrace{(f+g)(v) = f(v) + g(v) = f(v) + w}_{\in \operatorname{Im}(f+g)} = \underbrace{f(v')}_{\in \operatorname{Im}(f)}$$

Par linéarité de f, on voit alors que :

$$w = f(v') - f(v) = f(v' - v).$$

Ceci achève de prouver que w est élément de $\operatorname{Im} f$, puisqu'on vient de l'écrire comme l'image par f d'un élément de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Etant donné un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, on s'intéresse aux applications linéaires $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ suivantes :

$$f(x,y,z) = (-7x - 12y + 15z, 11x + 16y - 25z, 7x + 4y - 19z) \quad \text{et} \quad g(x,y,z) = (\alpha x - 6y - 4z, (3\alpha - 2)y + \alpha^2 z, x + (\alpha - 1)y + 2z).$$

a. Quel est le rang de f ?
b. Déterminer le rang de g. On discutera en fonction de la valeur du paramètre réel α.
c. Même question que b. mais pour $f \circ g$.

Solution:

a. La matrice de f en base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -12 & 15 \\ 11 & 16 & -25 \\ 7 & 4 & -19 \end{pmatrix}.$$

Les lignes (et de même, les colonnes) de A ne sont pas deux-à-deux proportionnelles. Par conséquent, A est de rang supérieur ou égal à 2. Pour décider si elle est de rang 2 ou de rang 3, calculons son déterminant :

$$\begin{vmatrix} -7 & -12 & 15 \\ 11 & 16 & -25 \\ 7 & 4 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 0 & -42 \\ 11 & 16 & -25 \\ 7 & 4 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 0 & -42 \\ -17 & 0 & 51 \\ 7 & 4 & -19 \end{vmatrix} = 0,$$

la première égalité étant obtenue en appliquant l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3$, la deuxième en appliquant $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3$, et la troisième en constatant que :

$$\begin{pmatrix} 14 & 0 & -42 \end{pmatrix} = 14 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -17 & 0 & 51 \end{pmatrix} = -17 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

si bien que, dans le dernier déterminant écrit, la première et la deuxième ligne sont proportionnelles. On peut en conclure que A (et donc aussi f) est de rang 2.

b. La matrice de g en base canonique est :

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & -6 & -4 \\ 0 & 3\alpha-2 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha-1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculons le déterminant de B :

$$\begin{vmatrix} \alpha & -6 & -4 \\ 0 & 3\alpha-2 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha-1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha-\alpha^2-6 & -4-2\alpha \\ 0 & 3\alpha-2 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha-1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-\alpha^2-6 & -4-2\alpha \\ 3\alpha-2 & \alpha^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\alpha-\alpha^2-2 & -4-2\alpha \\ 3\alpha-\alpha^2-2 & \alpha^2 \end{vmatrix}$$

la première égalité étant obtenue en appliquant l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - \alpha L_3$, la deuxième en développant par rapport à la troisième ligne et la troisième en appliquant $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$. En observant qu'il y a maintenant le même facteur qui apparait deux fois sur la première colonne, on trouve :

$$\det B = \underbrace{(3\alpha-\alpha^2-2)}_{(\alpha-1)(2-\alpha)} \begin{vmatrix} 1 & -4-2\alpha \\ 1 & \alpha^2 \end{vmatrix} = (\alpha-1)(2-\alpha)\underbrace{(\alpha^2+2\alpha+4)}_{(\alpha+1)^2+3>0}.$$

Discutons alors selon la valeur de α. Tout d'abord, si $\alpha \notin \{1,2\}$ on voit que g est de rang 3, car le déterminant de B est non nul. Supposons maintenant que $\alpha = 1$. On a alors :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On sait par avance que le déterminant de cette matrice est nul. Elle est donc de rang inférieur ou égal à 2. De plus, ses colonnes (et de même, ses lignes) ne sont pas deux-à-deux proportionnelles, donc son rang est supérieur ou égal à 2. En conclusion, elle est de rang 2. Supposons alors que $\alpha = 2$. On a :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On sait par avance que le déterminant de cette matrice est nul. Elle est donc de rang inférieur ou égal à 2. De plus, ses colonnes (et de même, ses lignes) ne sont pas deux-à-deux proportionnelles, donc son rang est supérieur ou égal à 2. En conclusion, elle est de rang 2. En résumé, on a montré que :

$$\operatorname{rg} g = \begin{cases} 3 \text{ si } \alpha \notin \{1,2\} \\ 2 \text{ si } \alpha \in \{1,2\}. \end{cases}$$

c. Utilisons les résultats trouvés au a. et au b. pour discuter du rang de $f \circ g$ en fonction de α. Tout d'abord, si $\alpha \notin \{1,2\}$ on a montré au b. que g est inversible. Dans ce cas on sait alors que $f \circ g$ et f ont le même rang. D'après le a. on voit donc que $f \circ g$ est de rang 2. Supposons à présent que $\alpha = 1$ et cherchons la matrice de $f \circ g$ en base canonique :

$$AB = \begin{pmatrix} -7 & -12 & 15 \\ 11 & 16 & -25 \\ 7 & 4 & -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 30 & 46 \\ -14 & -50 & -78 \\ -12 & -38 & -62 \end{pmatrix}.$$

On sait par avance que le rang de cette matrice est inférieur aux rangs de A et de B. Autrement dit, on sait que cette matrice est de rang inférieur ou égal à 2. De plus, le calcul ci-dessus montre que les colonnes (et de même, les lignes) de AB ne sont pas deux-à-deux proportionnelles, si bien qu'elle est de rang supérieur ou égal à 2. En conclusion, on voit que dans ce cas AB est de rang 2. Supposons alors que $\alpha = 2$ et cherchons la matrice de $f \circ g$ en base canonique :

$$AB = \begin{pmatrix} -7 & -12 & 15 \\ 11 & 16 & -25 \\ 7 & 4 & -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 10 \\ -3 & -27 & -30 \\ -5 & -45 & -50 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est visiblement non nulle et ses colonnes (ou de même, ses lignes) sont deux-à-deux proportionnelles. On en conclut que dans ce cas AB est de rang 1. En résumé :

$$\operatorname{rg}(f \circ g) = \begin{cases} 2 \text{ si } \alpha \neq 2 \\ 1 \text{ si } \alpha = 2. \end{cases}$$

Remarque : au niveau géométrique, la différence observée entre les deux derniers cas étudiés provient du positionnement de $\operatorname{Im} g$ (qui est un plan vectoriel) par rapport à $\operatorname{Ker} f$ (qui est une droite vectorielle). Lorsque $\alpha = 2$ par exemple, on peut montrer que le noyau de f est contenu dans l'image de g. En passant de g à $f \circ g$ le noyau est alors augmenté : il y a dans $\operatorname{Ker}(f \circ g)$ les éléments de la droite vectorielle $\operatorname{Ker} g$, mais aussi les éléments de $\mathbb{R}^3$ qui sont envoyés par g dans $\operatorname{Ker} f$. Dans le cas où $\alpha = 1$ on ne trouve pas de tels nouveaux éléments, puisque $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} g$ s'intersectent seulement en $(0,0,0)$.

Exercice 6. On donne l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (3x + y + 7z, 7x + 8y + 5z, 5x + 3y + 9z).$$

a. Décrire le noyau et l'image de f.

b. Déterminer le rang de $f \circ f$. *Indication : que peut-on-dire de* $\operatorname{Ker}(f \circ f)$ *?*

c. Trouver ensuite, en fonction de l'entier $n \geqslant 3$, le rang de l'application linéaire $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

Solution: Notons A la matrice de f en base canonique, c'est-à-dire la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 7 & 8 & 5 \\ 5 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

a. Les colonnes de A (ou de même, les lignes) ne sont pas deux-à-deux proportionnelles. Par conséquent, A est de rang supérieur ou égal à 2. Pour décider si elle de rang 2 ou 3, calculons son déterminant :

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 7 & 8 & 5 \\ 5 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -17 & 8 & 5 \\ -4 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -17 & 8 & -51 \\ -4 & 3 & -12 \end{vmatrix} = 0,$$

la première égalité étant obtenue en appliquant l'opération $C_1 \leftarrow C_1 - 3C_2$, la deuxième en appliquant $C_3 \leftarrow C_3 - 7C_2$ et la dernière en constatant que dans le déterminant obtenu, les colonnes 1 et 3 sont proportionnelles. La matrice A est donc de rang 2. Le travail effectué jusqu'ici permet d'écrire une décomposition colonne-ligne minimale de A. En effet, on a en fait détecté la relation suivante entre les colonnes de A :

$$3(\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors :

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}}_{3\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dans cette décomposition, on sait que les lignes correspondent à des équations pour le noyau de f :

$$(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 3z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = \underbrace{(-3z, 2z, z)}_{z(-3,2,1)}.$$

On voit donc que $\operatorname{Ker} f$ est la droite vectorielle engendrée par $(-3, 2, 1)$. De plus, dans la décomposition de A ci-dessus, les colonnes correspondent à une base de l'image de f, qui est donc le plan vectoriel d'équation :

$$\operatorname{Im} f : \begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 7 & 8 & y \\ 5 & 3 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} z = -19x - 4y + 17z = 0$$

b. Montrons que $f \circ f$ et f ont le même noyau. Tout d'abord, l'inclusion :

$$\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(f \circ f)$$

est toujours vraie, puisque, pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$f(v) = (0, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad (f \circ f)(v) = f(f(v)) = f(0, 0, 0) = (0, 0, 0).$$

L'inclusion dans l'autre sens n'est pas toujours vraie, mais elle l'est dans le cas qui nous intéresse ici. Pour le montrer, donnons-nous un élément v du noyau de $f \circ f$ et cherchons à montrer qu'il est dans le noyau de f. Notre hypothèse est donc que :

$$(f \circ f)(v) = f(f(v)) = (0, 0, 0).$$

Intéressons-nous alors à $w = f(v)$. C'est par définition même un élément de $\operatorname{Im} f$. Il est aussi élément de $\operatorname{Ker} f$, puisque :

$$f(w) = f(f(v)) = (0,0,0).$$

Or, d'après les résultats obtenus au a., on voit que :

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{(0,0,0)\}$$

puisque le triplet $(-3,2,1)$ n'appartient pas au plan vectoriel d'équation $-19x - 4y + 17z = 0$. Par conséquent, $w = (0,0,0)$, ou, autrement dit, $f(v) = (0,0,0)$. Ceci achève de montrer l'inclusion dans l'autre sens, si bien que l'on a établi que :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(f \circ f).$$

Par le théorème du rang, on voit maintenant que $f \circ f$ a le même rang que f, à savoir 2.

c. On procède exactement comme ci-dessus pour montrer par récurrence que :

$$\operatorname{Ker}(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}) = \operatorname{Vect}((-3,2,1)).$$

pour tout entier $n \geqslant 2$ (l'initialisation au cas $n = 2$ a été établie ci-dessus). Pour l'hérédité, supposons la propriété vraie pour n et montrons-la pour $n+1$. Tout d'abord, l'inclusion :

$$\operatorname{Vect}((-3,2,1)) \subset \operatorname{Ker}(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n+1 \text{ fois}})$$

est claire, puisqu'un multiple scalaire de $(-3,2,1)$ est envoyé sur $(0,0,0)$ par f, et donc aussi par f composée $n+1$ fois avec elle-même. Pour l'inclusion dans l'autre sens, donnons-nous un élément :

$$v \in \operatorname{Ker}(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n+1 \text{ fois}}).$$

On a donc :

$$(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n+1 \text{ fois}})(v) = (\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}})(f(v)) = (0,0,0)$$

si bien $w = f(v)$, qui est par définition même un élément de $\operatorname{Im} f$, est aussi dans le noyau de $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$. D'après l'hypothèse de récurrence w appartient donc au noyau de f, et on a déjà vu au b. que :

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{(0,0,0)\}.$$

Par conséquent, $w = (0,0,0)$, ou, autrement dit, $f(v) = (0,0,0)$. D'après le a. on voit donc bien que v est un multiple scalaire de $(-3,2,1)$, ce qui achève la preuve par récurrence. Pour conclure, utilisons le théorème du rang : le noyau de $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ étant une droite vectorielle, cette application linéaire est de rang $3 - 1 = 2$.

Exercice 7. On donne deux applications linéaires $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telles que :

$$\operatorname{rg} f = 1, \quad \operatorname{rg} g = 2, \quad \operatorname{Im} f \not\subset \operatorname{Im} g.$$

Montrer alors que $f + g$ est de rang 2 si et seulement si $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$. *Indication : on pourra étudier le noyau de $f + g$.*

Solution: $\operatorname{Im} f$ est une droite vectorielle (car $\operatorname{rg} f = 1$) et $\operatorname{Im} g$ est un plan vectoriel (car $\operatorname{rg} g = 2$). Par conséquent dire que $\operatorname{Im} f$ n'est pas contenue dans $\operatorname{Im} g$, c'est la même chose que de dire que :

$$\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{(0,0,0)\}.$$

Cherchons alors à déterminer le noyau de $f + g$:

$$v \in \operatorname{Ker}(f+g) \quad \Leftrightarrow \quad (f+g)(v) = (0,0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{f(v) = -g(v)}_{\in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g} \quad \Leftrightarrow \quad f(v) = g(v) = (0,0,0) \quad \Leftrightarrow \quad v \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g.$$

Autrement dit, dans la situation étudiée ici, on a :

$$\operatorname{Ker}(f+g) = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g.$$

D'après le théorème du rang, on voit donc que $f + g$ est de rang 2 si et seulement si $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$ est de dimension 1. Toujours d'après le théorème du rang, $\operatorname{Ker} f$ est un plan vectoriel et $\operatorname{Ker} g$ une droite vectorielle, si bien que leur intersection est de dimension 1 si et seulement si $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$, ce qui achève la preuve.