Série 16

Exercice 1. L'application f donnée est-elle linéaire ? Si oui, en donner la matrice en base canonique.

a. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$(x, y, z) \to (x - z, 2x + 5y, y + z)$

b. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$(x, y, z) \to (-y, z, x + 1)$

c. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$(x, y, z) \to (x, y, x - y)$.

Solution:

a. L'application f proposée est linéaire (elle a bien la forme voulue, c'est-à-dire que, dans l'expression de f, chacune des trois composantes est une combinaison linéaire de x, y et z). Elle a pour matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

en base canonique. Rappelons comment trouver cette matrice. Une première méthode consiste à créer les lignes de A en extrayant systématiquement les coefficients devant x, y et z dans l'expression de $f(x, y, z)$. On trouve alors les lignes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui, une fois mises ensemble, donnent bien la matrice A ci-dessus. Une autre façon de s'y prendre est de chercher à exprimer $[f(x, y, z)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$ en fonction de $[(x, y, z)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$. La matrice qui fait le lien entre les deux n'est autre que la matrice de f en base canonique. On trouve :

$$[f(x, y, z)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} x - z \\ 2x + 5y \\ y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A[(x, y, z)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$$

Enfin, une autre méthode consiste à calculer la famille image par f de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, puis les coordonnées des éléments obtenus dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On trouve :

$$[f(1,0,0)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = [(1,2,0)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ [f(0,1,0)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = [(0,5,1)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \ \text{et} \ [f(0,0,1)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = [(-1,0,1)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui ne sont autres que les colonnes de A.

b. L'application f proposée ici n'est pas linéaire. En effet, l'expression $x+1$ se trouvant en troisième position dans $f(x, y, z)$ n'est pas une combinaison de x, y et z. Une autre façon de se convaincre consiste à observer que f ne respecte pas les structures vectorielles. Par exemple, on a :

$$f(0, 0, 1) = 2 \quad \text{et} \quad f(0, 0, -1) = 0$$

alors que pour une application linéaire les deux valeurs trouvées devraient être opposées (extraction du facteur -1).

c. L'application f proposée est linéaire et a pour matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

en base canonique.

Exercice 2. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ (x, y, z) \to (2x - y + z, x + 3y + 4z, 3x + 2y + 5z).$$

a. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.

b. Quel est le rang de f ? Donner une (ou des) équation(s) de $\operatorname{Im} f$.

c. Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, décrire l'ensemble $f^{-1}(\{(a,b,c)\})$ des antécédents de (a,b,c) par f.

Solution:

a. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -7y - 7z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \\ -7y - 7z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) = z(-1,-1,1).$$

On voit donc que $\operatorname{Ker} f$ est la droite vectorielle engendrée par $(-1,-1,1)$.

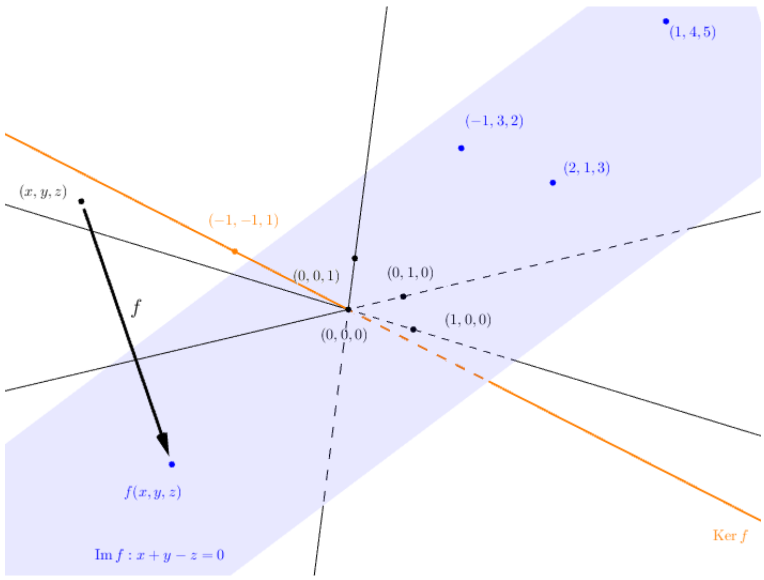
b. D'après le théorème du rang, on sait alors que l'image de f est de dimension $3 - 1 = 2$. Autrement dit, $\operatorname{Im} f$ est un plan vectoriel. Sur ce plan se trouvent par exemple les éléments suivants :

$$f(1,0,0) = (2,1,3), \quad f(0,1,0) = (-1,3,2), \quad f(0,0,1) = (1,4,5) \quad \ldots$$

En prenant par exemple les deux premiers éléments de cette liste, on obtient une base de $\operatorname{Im} f$ (car ils ne sont pas proportionnels). Par conséquent, on voit que ce plan vectoriel admet pour équation :

$$\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ y & 1 & 3 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} z = -7(x+y-z) = 0, \text{ ou encore } x + y - z = 0.$$

Ci-dessous se trouve une représentation graphique de f :



c. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(x,y,z) \in f^{-1}(\{(a,b,c)\}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - y + z = a \\ x + 3y + 4z = b \\ 3x + 2y + 5z = c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -7y - 7z = a - 2b \\ x + 3y + 4z = b \\ -7y - 7z = -3b + c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y + z = -\frac{1}{7}a + \frac{2}{7}b \\ x + 3y + 4z = b \\ a + b = c \end{cases}$$

Si $a+b \neq c$, ou autrement dit si (a,b,c) n'appartient pas à $\operatorname{Im} f$, alors (a,b,c) ne possède aucun antécédent par f, c'est-à-dire :

$$f^{-1}(\{(a,b,c)\}) = \varnothing.$$

Supposons à présent que $a + b = c$. On a alors :

$$(x,y,z) \in f^{-1}(\{(a,b,c)\}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{7}a + \frac{2}{7}b - z \\ x = \frac{3}{7}a + \frac{1}{7}b - z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) = \underbrace{\left(\tfrac{3}{7}a + \tfrac{1}{7}b, -\tfrac{1}{7}a + \tfrac{2}{7}b, 0\right)}_{\text{antécédent particulier}} + z \underbrace{(-1,-1,1)}_{\text{base de } \operatorname{Ker} f}.$$

L'ensemble des antécédents de (a,b,c) par f est dans ce cas la droite parallèle à $\operatorname{Ker} f$ passant par $\left(\frac{3}{7}a + \frac{1}{7}b, -\frac{1}{7}a + \frac{2}{7}b, 0\right)$.

Exercice 3. On donne une une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont on sait qu'elle vérifie :

$$f^{-1}(\{(2,-2,4)\}) = \{(1+2s+t, -1+s+t, 1-s),\ s,t \in \mathbb{R}\}.$$

a. Déterminer une (ou des) équation(s) de $\operatorname{Ker} f$. Quel est le rang de f ?

b. Donner une base de $\operatorname{Im} f$.

c. Trouver l'expression de $f(x,y,z)$ en fonction de x, y et z.

Solution:

a. Commençons par poser :

$$w = (2,-2,4), \quad v_0 = (1,-1,1), \quad v_1 = (2,1,-1) \quad \text{et} \quad v_2 = (1,1,0).$$

En réécrivant la préimage donnée dans l'énoncé sous la forme :

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v_0 + sv_1 + tv_2,\ s,t \in \mathbb{R}\}$$

on voit qu'il s'agit du plan passant par v_0 et parallèle à $\operatorname{Vect}(v_1, v_2)$ (v_1 et v_2 n'étant pas proportionnels, ils engendrent un plan vectoriel). On sait alors que le noyau de f est le plan vectoriel parallèle à $f^{-1}(\{w\})$ (c'est-à-dire celui passant par $(0,0,0)$). Par conséquent :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(v_1, v_2).$$

Il a donc pour équation :

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} z = x - y + z = 0.$$

D'après le théorème du rang, on obtient alors que :

$$\operatorname{rg}(f) = \underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{3} - \underbrace{\dim(\operatorname{Ker} f)}_{2} = 1.$$

b. Comme f est de rang 1, son image est une droite vectorielle. De plus, w possède des antécédents par f (puisque sa préimage est non vide) : il appartient donc à $\operatorname{Im} f$. Comme il est non nul, il en forme une base. On a donc :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(\underbrace{w}_{(2,-2,4)}) = \operatorname{Vect}((1,-1,2)) = \operatorname{Vect}((-1,1,-2)) = \cdots$$

c. D'après les résultats trouvés au a. et b., on voit qu'en décomposant $f(x,y,z)$ sur la base $(1,-1,2)$ de $\operatorname{Im} f$ on doit trouver une expression du type :

$$f(x,y,z) = \underbrace{\alpha(x-y+z)}_{\text{équation de } \operatorname{Ker} f} \underbrace{(1,-1,2)}_{\text{base de } \operatorname{Im} f}.$$

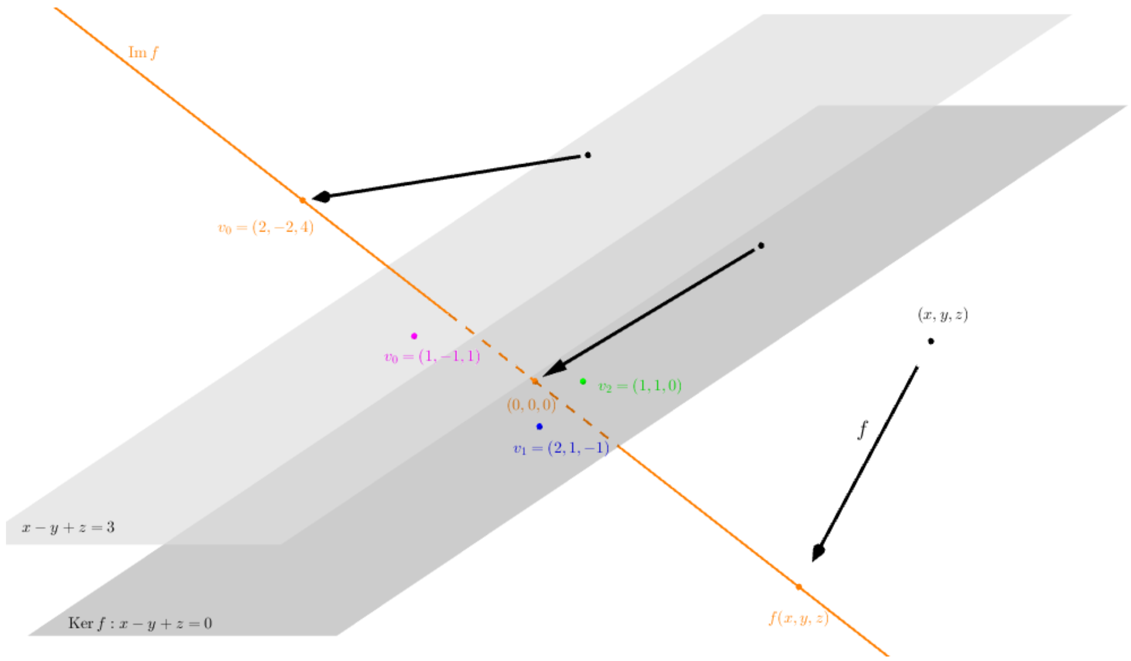
pour un certain réel α non nul. Pour trouver la valeur de α, exprimons, en utilisant l'expression ci-dessus, que v_0 est envoyé sur w par f :

$$f(v_0) = w \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{f(1,-1,1)}_{3\alpha(1,-1,2)} = (2,-2,4) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \tfrac{2}{3}.$$

On a donc finalement réussi à obtenir l'expression de f :

$$f(x,y,z) = \tfrac{2}{3}(x-y+z)(1,-1,2).$$

Ce n'est pas demandé, mais représentons à présent sur un dessin la situation étudiée dans cet exercice :



Exercice 4. Donner un exemple d'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant que :

a. Im f est le plan vectoriel d'équation $3x + y + 2z = 0$.

b. Même condition qu'au a. et, en supplément, $(1, 2, 4) \in$ Ker f.

c. Mêmes conditions qu'au b. et, en supplément, $(1, 0, 0)$ est un antécédent de $(1, 1, -2)$ par f.

Solution:

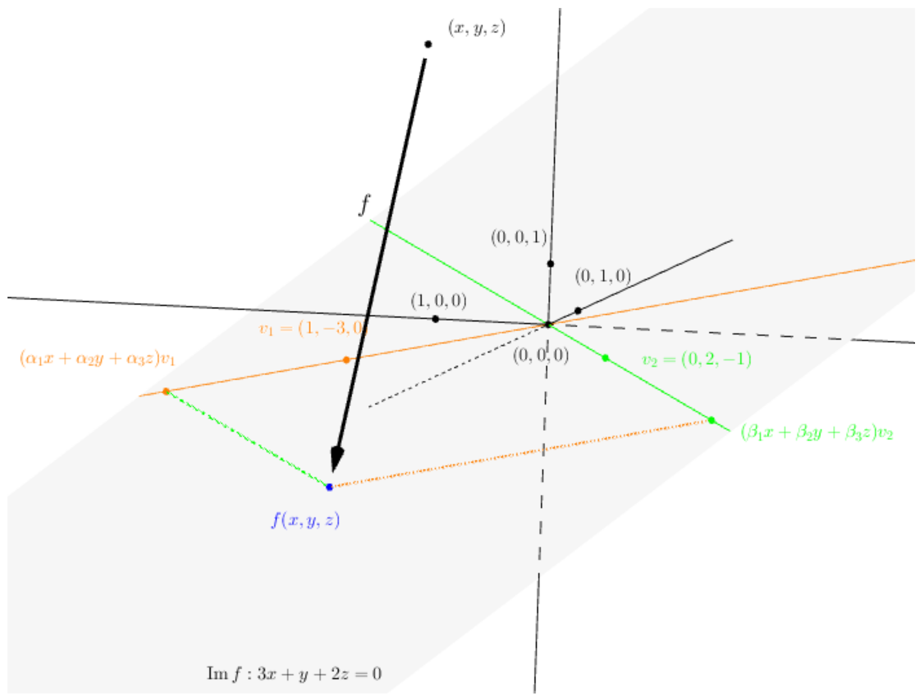
a. Le plan vectoriel proposé admet pour base :

$$\mathcal{B} = \underbrace{(1, -3, 0)}_{v_1}, \underbrace{(0, 2, -1)}_{v_2}.$$

On sait alors que f a ce plan vectoriel pour image si et seulement si elle se décompose sous la forme suivante :

$$f(x, y, z) = (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z)v_1 + (\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z)v_2$$

où les deux expressions en x, y, z figurant devant v_1 et v_2 (qui ne sont autres que les coordonnées de $f(x, y, z)$ dans la base $\mathcal{B}$) ne sont pas proportionnelles. Visuellement, une telle application linéaire f peut se représenter de la manière suivante :



Voici par exemple une application linéaire qui répond à la question posée :

$$f(x,y,z) = x(1,-3,0) + y(0,2,-1) = (x, -3x+2y, -y).$$

b. En reprenant les notations introduites au a., la nouvelle condition se traduit de la manière suivante :

$$(1,2,4) \in \operatorname{Ker} f \quad \Leftrightarrow \quad f(1,2,4) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3)v_1 + (\beta_1 + 2\beta_2 + 4\beta_3)v_2 = (0,0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \beta_1 + 2\beta_2 + 4\beta_3 = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, à chaque fois que l'on a deux triplets non proportionnels $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ satisfaisant ces équations, on obtient une application solution du problème posé. Par exemple, l'application suivante convient :

$$f(x,y,z) = (2x-y)(1,-3,0) + (z-2y)(0,2,-1) = (2x-y, -6x-y+2z, 2y-z)$$

(elle correspond à $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2,-1,0)$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (0,-2,1)$).

c. En reprenant à nouveau les notations ci-dessus, on voit que la nouvelle condition se traduit par :

$$(1,0,0) \in f^{-1}(\{(1,1-2)\}) \quad \Leftrightarrow \quad f(1,0,0) = \alpha_1 v_1 + \beta_1 v_2 = (1,1,-2).$$

Autrement dit, elle signifie exactement que α_1 et β_1 sont les coordonnées de $(1,1-2)$ dans la base $\mathcal{B} = v_1, v_2$ du plan vectoriel $\operatorname{Im} f$. La décomposition :

$$(1,1-2) = (1,-3,0) + 2(0,2,-1)$$

montre donc que cette condition équivaut à demander que $\alpha_1 = 1$ et $\beta_1 = 2$. Sous cette condition, le système trouvé au b. devient :

$$\begin{cases} 1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ 2 + 2\beta_2 + 4\beta_3 = 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_2 + 2\alpha_3 = -\frac{1}{2} \\ \beta_2 + 2\beta_3 = -1. \end{cases}$$

Par exemple, l'application suivante convient :

$$f(x,y,z) = (x - \tfrac{1}{2}y)(1,-3,0) + (2x+y-z)(0,2,-1) = (x - \tfrac{1}{2}y, x + \tfrac{7}{2}y - 2z, -2x - y + z)$$

(elle correspond à $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, -\frac{1}{2}, 0)$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (2,1,-1)$).

Exercice 5. On donne une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont on sait qu'elle vérifie :

$$f(-2,3,5) = (6,3,9) \quad \text{et} \quad (1,-3,4) \in \operatorname{Ker} f.$$

Pour chacune des affirmations suivantes, dire, en justifiant votre réponse, si elle est vraie ou fausse.

a. L'ensemble $f^{-1}(\{(4,2,6)\})$ est vide.

b. $(-2,3,5)$ est le seul antécédent de $(6,3,9)$ par f.

c. Si $f(2,0,1) = (-1,7,2)$ alors $f(3,1,-5) \neq (0,0,0)$.

d. Si $f(0,1,-3) = (2,1,3)$ alors $f^{-1}(\{(1,0,2)\})$ est vide.

Solution:

a. C'est faux. En effet, comme f est linéaire, on voit que :

$$f\underbrace{\left(-\tfrac{4}{3}, 2, \tfrac{10}{3}\right)}_{\frac{2}{3}(-2,3,5)} = \tfrac{2}{3} f(-2,3,5) = \tfrac{2}{3}(6,3,9) = (4,2,6).$$

Par conséquent l'élément $(4,2,6)$ de $\mathbb{R}^3$ possède (au moins) un antécédent par f : l'ensemble $f^{-1}(\{(4,2,6)\})$ est non vide.

b. C'est faux. En effet, on sait que l'ensemble $f^{-1}(\{(6,3,9)\})$ des antécédents de $(6,3,9)$ est parallèle au noyau de f. Comme ce noyau est de dimension supérieure ou égale à 1 (puisque l'élément non nul $(1,-3,4)$ s'y trouve), il est clair que $(6,3,9)$ possède une infinité d'antécédents par f. De manière plus concrète, on peut créer d'autres antécédents de $(6,3,9)$ par f en ajoutant à $(-2,3,5)$ un élément du noyau de f (la linéarité de f montre effectivement qu'en faisant cela on ne change pas l'image par f). Voici quelques exemples de tels antécédents :

$$(-2,3,5), \quad \underbrace{(-1,0,9)}_{(-2,3,5)+(1,-3,4)}, \quad \underbrace{(-3,6,1)}_{(-2,3,5)-(1,-3,4)}, \quad \underbrace{(0,-3,13)}_{(-2,3,5)+2(1,-3,4)} \quad \ldots$$

c. C'est vrai. En effet, des deux conditions :

$$f(-2,3,5)=(6,3,9) \quad \text{et} \quad f(2,0,1)=(-1,7,2)$$

on déduit que $(6,3,9)$ et $(-1,7,2)$ appartiennent à $\operatorname{Im} f$. Comme ces deux triplets ne sont pas proportionnels, on en déduit que $\operatorname{Im} f$ est de dimension supérieure ou égale à 2. Par ailleurs, de la condition :

$$(1,-3,4) \in \operatorname{Ker} f$$

et du fait que le triplet $(1,-3,4)$ est non nul, on déduit que le noyau de f est de dimension supérieure ou égale à 1. D'après le théorème du rang on a alors :

$$\underbrace{\dim(\operatorname{Ker} f)}_{\geqslant 1}+\underbrace{\dim(\operatorname{Im} f)}_{\geqslant 2}=3$$

ce qui permet de conclure que $\operatorname{Im} f$ est un plan vectoriel et $\operatorname{Ker} f$ est une droite vectorielle, à savoir :

$$\operatorname{Ker} f=\operatorname{Vect}((1,-3,4)).$$

Comme $(3,1,-5)$ n'appartient pas à cette droite vectorielle, on peut effectivement conclure que $f(3,1,-5) \neq (0,0,0)$.

d. C'est vrai. En effet, des deux conditions :

$$f(-2,3,5)=(6,3,9) \quad \text{et} \quad f(0,1,-3)=(2,1,3)$$

et de la linéarité de f on déduit que :

$$f(\underbrace{(-2,3,5)-3(0,1,-3)}_{(-2,0,14)})=f(-2,3,5)-3f(0,1,-3)=(6,3,9)-3(2,1,3)=(0,0,0).$$

Autrement dit, le triplet $(-2,0,14)$ (ou encore $(-1,0,7)$) appartient à $\operatorname{Ker} f$. Or d'après l'énoncé on sait aussi que $(1,-3,4)$ appartient également au noyau de f. Comme ces deux éléments ne sont pas proportionnels on en déduit que $\operatorname{Ker} f$ est de dimension supérieure ou égale à 2. Par ailleurs, de la condition :

$$f(-2,3,5)=(6,3,9)$$

et du fait que le triplet $(6,3,9)$ est non nul, on déduit que l'image de f est de dimension supérieure ou égale à 1. D'après le théorème du rang on a alors :

$$\underbrace{\dim(\operatorname{Ker} f)}_{\geqslant 2}+\underbrace{\dim(\operatorname{Im} f)}_{\geqslant 1}=3$$

ce qui permet de conclure que $\operatorname{Ker} f$ est un plan vectoriel et $\operatorname{Im} f$ est une droite vectorielle, à savoir :

$$\operatorname{Im} f=\operatorname{Vect}((6,3,9))=\operatorname{Vect}((2,1,3)).$$

Comme le triplet $(1,0,2)$ n'appartient pas à cette droite vectorielle, on en déduit qu'il ne possède aucun antécédent par f, ou, autrement dit, que l'ensemble $f^{-1}(\{(1,0,2)\})$ est vide.

Exercice 6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f l'application linéaire $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z)=((1-\alpha^3)x+(1+\alpha^3)y+(-\alpha^3+\alpha+4)z, \alpha x+y+(3\alpha+2)z, -\alpha^3 x+(2+\alpha^3)y+(-\alpha^3+\alpha+3)z).$$

Trouver la valeur de α sachant que $f(1,5,-2)$ et $f(1,2,-1)$ sont proportionnels.

Solution: Commençons par observer que le noyau de f n'est pas le sous-espace nul. En effet, si on suppose que :

$$f(1,5,-2)=(0,0,0)$$

alors $(1,5,-2)$ se trouve dans ce noyau, qui est donc non nul. Dans le cas contraire, on peut traduire la condition que $f(1,5,-2)$ et $f(1,2,-1)$ sont proportionnels en disant qu'il existe un réel α vérifiant :

$$f(1,2,-1)=\alpha f(1,5,-2).$$

Par linéarité de f, on obtient alors :

$$f((1,2,-1)-\alpha(1,5,-2))=f(1,2,-1)-\alpha f(1,5,-2)=(0,0,0).$$

Remarquons enfin que le triplet :

$$(1, 2, -1) - \alpha(1, 5, -2)$$

est non nul puisque $(1, 2, -1)$ et $(1, 5, -2)$ ne sont pas proportionnels. On a donc aussi dans ce cas trouvé un élément non nul dans le noyau de f, ce qui termine de montrer que $\operatorname{Ker} f$ n'est pas le sous-espace nul. Le déterminant de la matrice de f en base canonique doit donc être nul :

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha^3 & 1+\alpha^3 & -\alpha^3+\alpha+4 \\ \alpha & 1 & 3\alpha+2 \\ -\alpha^3 & 2+\alpha^3 & -\alpha^3+\alpha+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \alpha & 1 & 3\alpha+2 \\ -\alpha^3 & 2+\alpha^3 & -\alpha^3+\alpha+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & 2\alpha+2 \\ -\alpha^3 & 2 & \alpha+3 \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & 0 \\ -\alpha^3 & 2 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)(\alpha+1),$$

la première égalité étant obtenue par l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, la deuxième via les opérations $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ et la troisième via l'opération $C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2$. A ce stade, il n'y a donc plus que deux valeurs de α candidates : 1 et -1. Examinons à présent ces deux valeurs. Pour $\alpha = 1$, on obtient :

$$f(x, y, z) = (2y + 4z, x + y + 5z, -x + 3y + 3z) \text{ et donc } f(1, 5, -2) = (2, -4, 8),\ f(1, 2, -1) = (0, -2, 2).$$

Par conséquent, $\alpha = 1$ n'est pas solution. Pour $\alpha = -1$, on obtient :

$$f(x, y, z) = (2x + 4z, -x + y - z, x + y + 3z) \text{ et donc } f(1, 5, -2) = (-6, 6, 0),\ f(1, 2, -1) = (-2, 2, 0).$$

Par conséquent, $\alpha = -1$ est solution.

Exercice 7. Déterminer, en fonction de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, le rang, le noyau et l'image de l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (\alpha x + \beta y + \gamma z, \gamma x + \alpha y + \beta z, \beta x + \gamma y + \alpha z).$$

Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice 7, série 13.

Solution: L'application linéaire étudiée ici a pour matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

en base canonique. Le déterminant de cette matrice a été calculé à l'exercice 7, série 13. On a trouvé :

$$\det(A) = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)((\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2).$$

Supposons dans un premier temps que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et que α, β et γ ne sont pas tous les trois égaux. Dans ce cas, le déterminant de A est non nul, si bien que f est de rang 3 : $\operatorname{Ker} f$ est le sous-espace nul et $\operatorname{Im} f$ est égal à $\mathbb{R}^3$. Supposons maintenant que $\alpha = \beta = \gamma$. On a alors :

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui correspond à l'expression suivante de f :

$$f(x, y, z) = \alpha(x + y + z)(1, 1, 1).$$

Si $\alpha = \beta = \gamma = 0$, alors f est l'application nulle, et est donc de rang nul : $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^3$ et $\operatorname{Im} f$ est le sous-espace nul. Si $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$, f est de rang 1. Son noyau est le plan vectoriel d'équation $x+y+z = 0$ et son image est la droite vectorielle engendrée par $(1, 1, 1)$. Enfin, supposons que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. On a alors :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & -\alpha - \beta \\ -\alpha - \beta & \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha - \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Si α et β (et donc aussi γ) sont nuls, on voit que A est la matrice nulle. Ce cas a déjà été vu précédemment : f est l'application nulle, sont noyau est $\mathbb{R}^3$ et son image est le sous-espace nul. Si α ou β est non nul, alors A est de rang 2. En effet, on a vu ci-dessus que le déterminant de A est nul, si bien que A est de rang inférieur ou égal à 2 (on peut aussi observer que la somme des colonnes de A est nulle). Par ailleurs, il est impossible que les deux premières colonnes soient proportionnelles, puisque :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha-\beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 = (\alpha+\tfrac{1}{2}\beta)^2+\tfrac{3}{4}\beta^2 = \tfrac{3}{4}\alpha^2+(\tfrac{1}{2}\alpha+\beta)^2 \neq 0.$$

Ainsi, le rang de A ne peut être inférieur ou égal à 1. Il est donc bien égal à 2. Ecrivons alors une décomposition colonne-ligne minimale de A :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha-\beta \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ -\alpha-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Elle correspond à l'expression suivante de f :

$$f(x,y,z) = (x-z)(\alpha,-\alpha-\beta,\beta)+(y-z)(\beta,\alpha,-\alpha-\beta).$$

Le noyau de f est décrit par les équations :

$$\begin{cases} x-z=0 \\ y-z=0. \end{cases}$$

Il s'agit de la droite vectorielle engendrée par $(1,1,1)$. L'image de f est le plan vectoriel engendré par

$$(\alpha,-\alpha-\beta,\beta),(\beta,\alpha,-\alpha-\beta).$$

Il a pour équation $x+y+z=0$ (car les deux éléments ci-dessus satisfont cette équation).