Série 15

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$, on donne les éléments suivants :

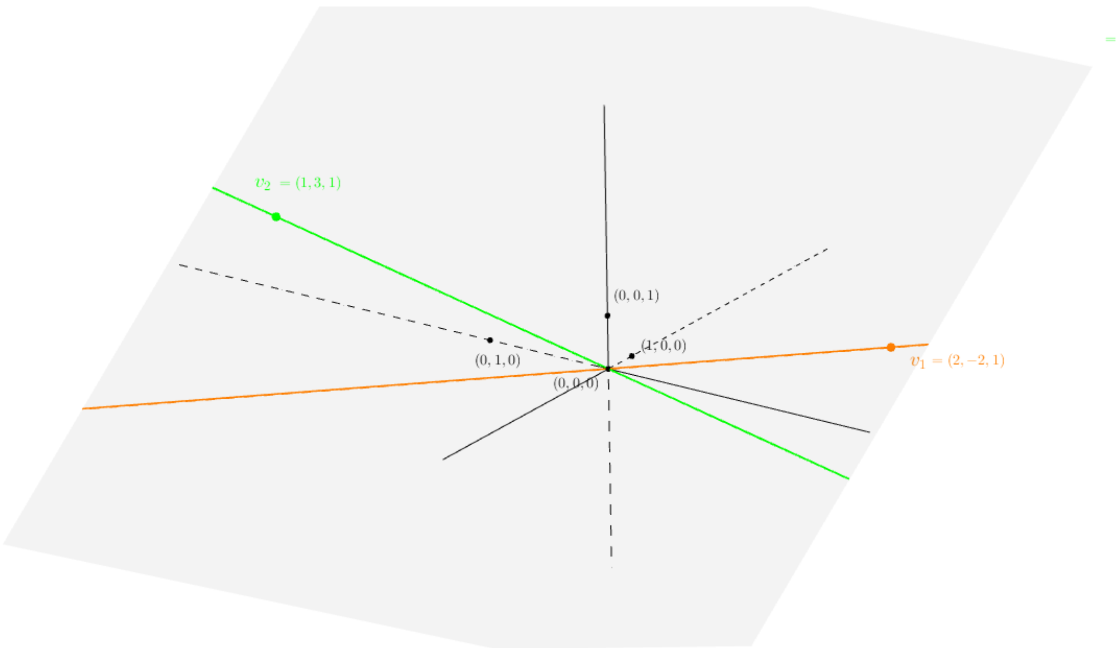
$$v_1 = (2, -2, 1),\ v_2 = (1, 3, 1),\ v_3 = (-1, 1, -\tfrac{1}{2}),\ v_4 = (-\tfrac{3}{2}, \tfrac{7}{2}, -\tfrac{1}{2}).$$

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la dimension et une base de V :

a. $V = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ b. $V = \mathrm{Vect}(v_1, v_3)$ c. $V = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_4)$.

Solution:

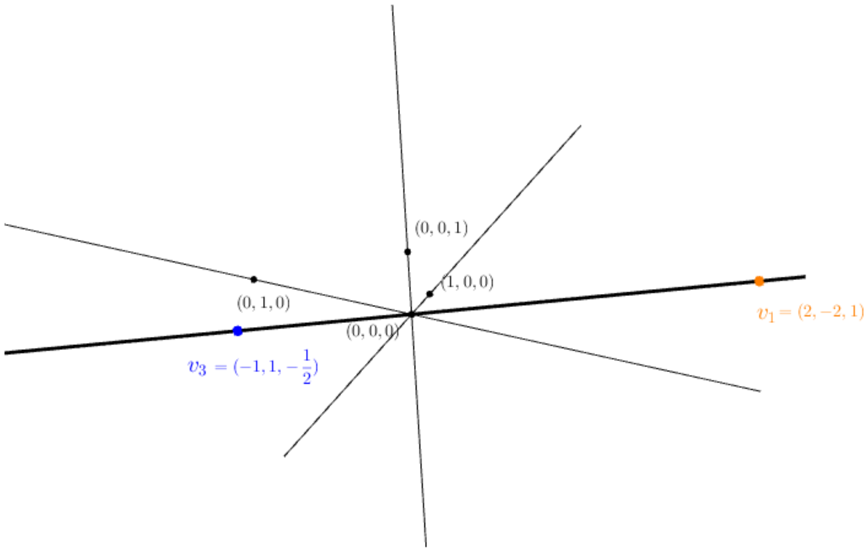
a. Observons que v_1 et v_2 ne sont pas proportionnels. Par conséquent, $V = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ est un plan vectoriel, il est de dimension 2. La famille v_1, v_2 en est une base (de même que toute famille formée de deux éléments de V qui ne sont pas proportionnels). Visuellement :



b. Les éléments v_1 et v_3 sont non nuls et ils sont proportionnels car $v_1 = -2v_3$. Par conséquent :

$$V = \mathrm{Vect}(v_1, v_3) = \mathrm{Vect}(v_1) = \mathrm{Vect}(v_3)$$

est une droite vectorielle (dimension 1). La famille v_1 (à un élément) en est une base (tout comme la famille v_3 par exemple, ou encore toute famille formée d'un multiple scalaire non nul de v_1). Visuellement :



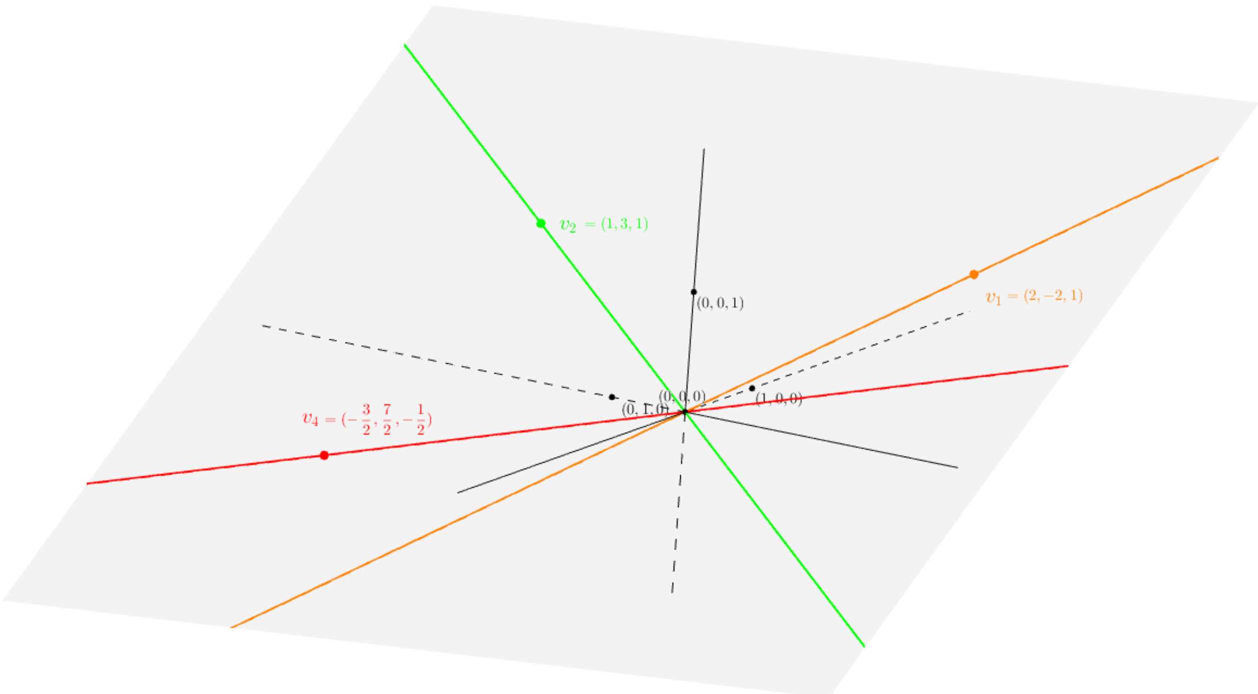
c. Nous avons déjà vu au a. que v_1 et v_2 engendrent un plan vectoriel. Par conséquent il y a deux possibilités : soit V est égal à ce plan vectoriel (ce sera le cas si et seulement si v_4 est combinaison linéaire de v_1 et v_2), soit V est égal à $\mathbb{R}^3$. Pour décider dans quel cas on est, on peut par exemple calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 3 & \frac{7}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Comme ce déterminant est nul, on sait que V est un plan vectoriel (dimension 2). La famille v_1, v_2 est une base de V (tout comme la famille v_1, v_4, ou v_2, v_4, ou encore toute famille formée de deux éléments de V qui ne sont pas proportionnels) :

$$V = \text{Vect}(v_1, v_2, v_4) = \text{Vect}(v_1, v_2) = \text{Vect}(v_1, v_4) = \text{Vect}(v_2, v_4) = \cdots$$

Visuellement :



Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^3$, on donne la famille $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$, où :

$$v_1 = (2, 1, -1),\ v_2 = (-1, 3, 0),\ v_3 = (1, -1, 2).$$

a. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
b. Ecrire des équations de la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(v_1)$. Même question pour $\mathrm{Vect}(v_2)$.
c. Déterminer une équation du plan vectoriel $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.
d. Etant donné un élément $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, calculer $[v]_{\mathcal{B}}$ et écrire la décomposition de v sur $\mathcal{B}$.

Solution:

a. Pour établir que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on peut par exemple calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 16.$$

Comme il est non nul, on sait que $\mathcal{B}$ est bien une base.

b. On trouve par exemple :

$$\mathrm{Vect}(v_1) : \tfrac{x}{2} = y = -z \quad \text{et} \quad \mathrm{Vect}(v_2) : -x = \tfrac{y}{3},\ z = 0.$$

c. Le plan vectoriel $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ est décrit par l'équation :

$$\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ y & 1 & 3 \\ z & -1 & 0 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3x + y + 7z = 0.$$

d. Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors les coordonnées de v en inversant le système linéaire général de matrice P :

$$[v]_{\mathcal{B}} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2t_1 - t_2 + t_3 = x \\ t_1 + 3t_2 - t_3 = y \\ -t_1 + 2t_3 = z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2t_1 - t_2 + t_3 = x \\ 7t_1 + 2t_3 = 3x + y \\ -t_1 + 2t_3 = z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2t_1 - t_2 + t_3 = x \\ 8t_1 = 3x + y - z \\ -t_1 + 2t_3 = z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t_1 = \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}y - \frac{1}{8}z \\ t_2 = -\frac{1}{16}x + \frac{5}{16}y + \frac{3}{16}z \\ t_3 = \frac{3}{16}x + \frac{1}{16}y + \frac{7}{16}z \end{cases}$$

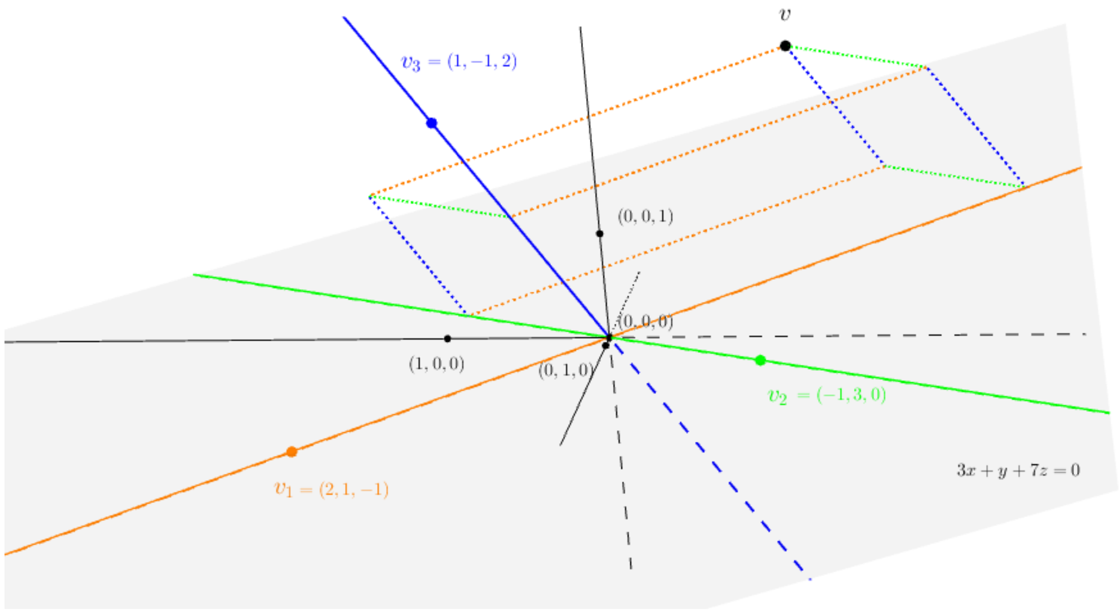
La décomposition de v sur $\mathcal{B}$ s'écrit donc :

$$(x, y, z) = (\tfrac{3}{8}x + \tfrac{1}{8}y - \tfrac{1}{8}z)(2, 1, -1) + (-\tfrac{1}{16}x + \tfrac{5}{16}y + \tfrac{3}{16}z)(-1, 3, 0) + (\tfrac{3}{16}x + \tfrac{1}{16}y + \tfrac{7}{16}z)(1, -1, 2).$$

C'est une bonne idée de tester le résultat que l'on vient d'obtenir, en calculant quelques exemples explicites. Par exemple, pour $v = v_1 = (2, 1, -1)$, l'expression de droite donne :

$$\underbrace{(\tfrac{3}{8}\cdot 2 + \tfrac{1}{8}\cdot 1 - \tfrac{1}{8}\cdot(-1))}_{1}(2, 1, -1) + \underbrace{(-\tfrac{1}{16}\cdot 2 + \tfrac{5}{16}\cdot 1 + \tfrac{3}{16}\cdot(-1))}_{0}(-1, 3, 0) + \underbrace{(\tfrac{3}{16}\cdot 2 + \tfrac{1}{16}\cdot 1 + \tfrac{7}{16}\cdot(-1))}_{0}(1, -1, 2) = (2, 1, -1).$$

La décomposition trouvée est donc la bonne dans ce cas. Pour terminer, représentons sur la figure ci-dessous la situation étudiée dans cet exercice :



Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$, on donne les deux familles suivantes :

$$\mathcal{B} = (1, 1, -1), (3, -2, 0) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = (2, -3, 1), (1, -4, 2).$$

a. Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases d'un même plan vectoriel V dont on donnera une équation.

b. On suppose que $v = (x, y, z)$ appartient à V. Décomposer v sur $\mathcal{B}$ et en déduire $[v]_{\mathcal{B}}$.

c. Sous la même hypothèse qu'au b., calculer $[v]_{\mathcal{B}'}$ et donner la décomposition de v correspondante.

Solution: Posons :

$$v_1 = (1, 1, -1),\ v_2 = (3, -2, 0),\ v_3 = (2, -3, 1),\ v_4 = (1, -4, 2).$$

a. Comme v_1 et v_2 ne sont pas proportionnels, il n'y a qu'un seul plan vectoriel dont ils forment une base, à savoir :

$$V = \mathrm{Vect}(v_1, v_2).$$

Pour trouver une équation de V calculons le déterminant :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y & 1 & -2 \\ z & -1 & 0 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2x - 3y - 5z.$$

On en déduit que V est décrit par l'équation $2x + 3y + 5z = 0$. Il est alors facile de vérifier que v_3 et v_4 appartiennent à V :

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 5 \cdot 1 = 0 \quad \text{et} \quad 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) + 5 \cdot 2 = 0.$$

Comme v_3 et v_4 ne sont pas proportionnels, on obtient finalement que $\mathcal{B}'$ est aussi une base de V, ce que l'on voulait.

b. Lorsque l'on cherche à décomposer v comme combinaison linéaire de v_1 et v_2, la présence du 0 en troisième position dans v_2 rend les calculs assez directs :

$$(x, y, z) = \underbrace{-z(1, 1, -1)}_{(-z, -z, z)} + \tfrac{x+z}{3}(3, -2, 0) \quad \Rightarrow \quad [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -z \\ \frac{x+z}{3} \end{pmatrix}.$$

Le coefficient $-z$ a été choisi pour assurer de trouver z en troisième position dans v. A partir de là, on doit utiliser le coefficient $\frac{x+z}{3}$ pour obtenir x en première position. Automatiquement, y se trouvera alors en deuxième position, puisqu'on a l'égalité suivante (due au fait que v appartient à V) :

$$-z - \tfrac{2}{3}(x + z) = -\tfrac{1}{3}(\underbrace{2x + 5z}_{-3y}) = y.$$

c. Cherchons les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}'$:

$$[v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) = s(2,-3,1) + t(1,-4,2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2s+t = x \\ -3s-4t = y \\ s+2t = z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} s+2t = z \\ -3t = x-2z \\ 2t = y+3z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} s+2t = z \\ t = \frac{-x+2z}{3} \\ 2\frac{-x+2z}{3} = y+3z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} s = \frac{2x-z}{3} \\ t = \frac{-x+2z}{3} \\ 2x+3y+5z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} s = \frac{2x-z}{3} \\ t = \frac{-x+2z}{3} \end{cases}$$

La dernière équivalence ayant lieu car l'égalité $2x+3y+5z = 0$ est vérifiée (puisque v appartient à V). On a donc obtenu :

$$[v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{2x-z}{3} \\ \frac{-x+2z}{3} \end{pmatrix}.$$

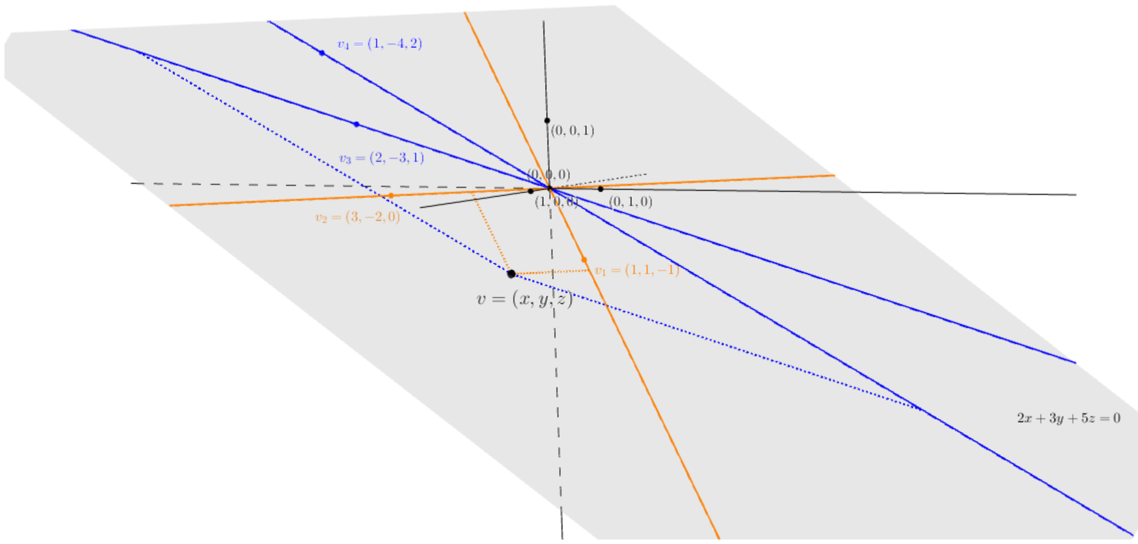
Ces coordonnées correspondent à la décomposition suivante de v sur $\mathcal{B}'$:

$$(x,y,z) = \tfrac{2x-z}{3}(2,-3,1) + \tfrac{-x+2z}{3}(1,-4,2).$$

Ce n'est pas nécessaire, mais il est bon de vérifier notre résultat en calculant l'expression trouvée à droite pour s'assurer que l'on obtient bien (x,y,z) :

$$2\tfrac{2x-z}{3} + \tfrac{-x+2z}{3} = x,\ -3\tfrac{2x-z}{3} - 4\tfrac{-x+2z}{3} = \tfrac{1}{3}(\underbrace{-2x-5z}_{-3y}) = y,\ \tfrac{2x-z}{3} + 2\tfrac{-x+2z}{3} = z.$$

Pour terminer, représentons sur la figure suivante la situation étudiée dans cet exercice :



Exercice 4. Si c'est possible, déterminer une base $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :

a. $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ est le plan vectoriel d'équation $2x+y+2z = 0$.

b. Même condition qu'au a. et, en supplément, $\mathrm{Vect}(v_2, v_3)$ contient $(4,1,3)$ et $(-6,5,2)$.

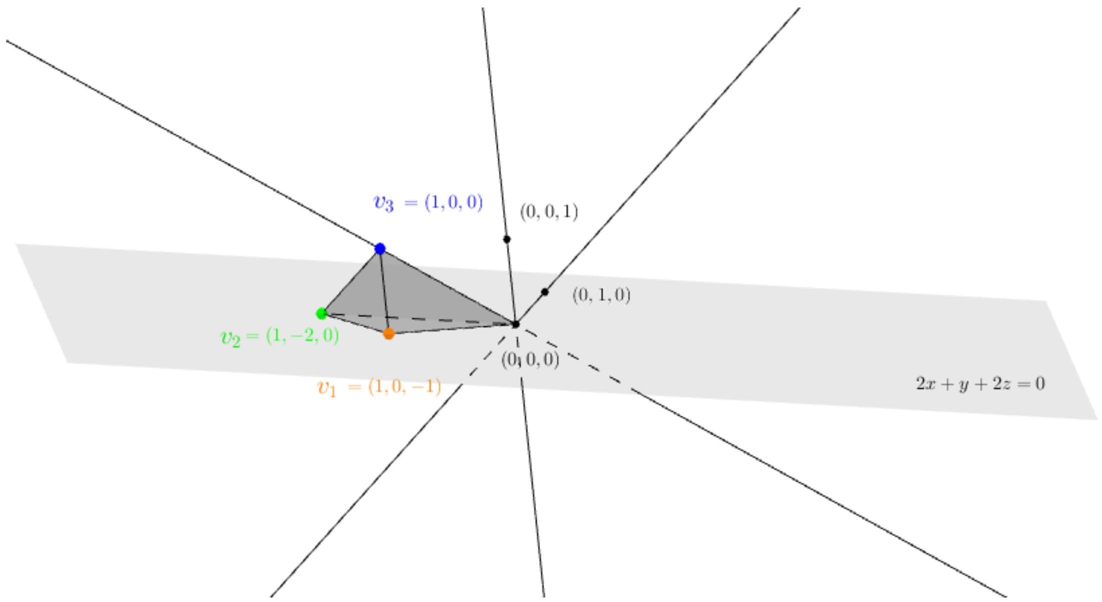
c. Mêmes conditions qu'au b. et, en supplément :

$$[(0,0,1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Solution:

a. Il suffit ici de choisir une base v_1, v_2 du plan vectoriel d'équation $2x+y+2z = 0$ (autrement dit, deux triplets non proportionnels satisfaisant l'équation) et de la compléter par un triplet v_3 en dehors de ce plan (c'est-à-dire qui ne satisfait pas l'équation). On peut donc par exemple poser :

$$v_1 = (1,0,-1),\ v_2 = (1,-2,0) \text{ et } v_3 = (1,0,0).$$



b. Comme $\mathrm{Vect}(v_2, v_3)$ est un plan vectoriel et $(4,1,3)$ et $(-6,5,2)$ ne sont pas proportionnels, la condition supplémentaire signifie en fait que ces deux éléments forment une base de $\mathrm{Vect}(v_2, v_3)$. Il s'agit donc du plan vectoriel d'équation :

$$\begin{vmatrix} x & 4 & -6 \\ y & 1 & 5 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \underbrace{-13x - 26y + 26z}_{-13(x+2y-2z)} = 0.$$

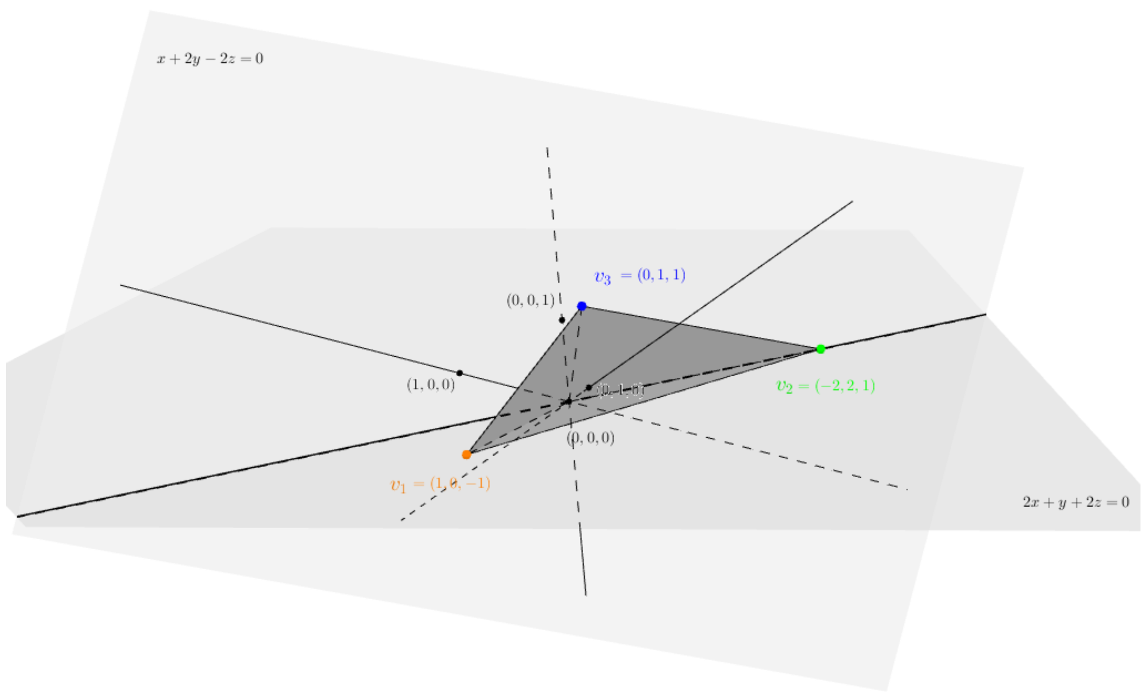
Le triplet v_2 se trouvant sur $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $\mathrm{Vect}(v_2, v_3)$, il doit donc satisfaire :

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y) = 0 \\ 2z = x + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

Posons alors par exemple $v_2 = (-2,2,1)$. Pour produire la base $\mathcal{B}$, il reste à choisir un élément v_1 sur le plan vectoriel d'équation $2x+y+2z=0$ qui ne soit pas proportionnel à v_2, comme par exemple $v_1 = (1,0,-1)$ et un élément v_3 sur le plan vectoriel d'équation $x+2y-2z=0$ qui ne soit pas proportionnel à v_2, comme par exemple $v_3 = (0,1,1)$. La famille :

$$v_1 = (1,0,-1),\ v_2 = (-2,2,1),\ v_3 = (0,1,1)$$

est donc solution du problème posé.



c. Le problème posé n'admet aucune solution. En effet, supposons qu'une telle base $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$ existe. Par définition même des coordonnées dans une base, on aurait alors :

$$(0,0,1) = 11v_2 - 7v_3$$

si bien que $(0,0,1)$ serait élément de $\mathrm{Vect}(v_2, v_3)$. Or d'après la condition supplémentaire introduite au b., ce plan vectoriel a pour équation $x + 2y - 2z = 0$, et cette équation n'est pas satisfaite par $(0,0,1)$.

Exercice 5. Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$[(1,1,-1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad [(-1,0,1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad [(3,1,-2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solution: Supposons dans un premier temps qu'une telle base $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$ de $\mathbb{R}^3$ existe. Par définition même des coordonnées dans une base, on a donc :

$$\begin{cases} (1,1,-1) = v_1 - v_2 + v_3 \\ (-1,0,1) = v_1 - v_2 \\ (3,1,-2) = -v_1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} v_1 = (-3,-1,2) \\ v_2 = (-3,-1,2) - (-1,0,1) = (-2,-1,1) \\ v_3 = (1,1,-1) - (-3,-1,2) + (-2,-1,1) = (2,1,-2) \end{cases}$$

On est donc amené à considérer la famille :

$$\mathcal{B} = (-3,-1,2), (-2,-1,1), (2,1,-2).$$

Pour conclure qu'elle convient, il ne reste plus qu'à vérifier que c'est une base de $\mathbb{R}^3$ (les coordonnées demandées seront alors automatiquement les bonnes vu l'équivalence ci-dessus). Pour cela, on peut par exemple calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1.$$

Comme il est non nul, la famille $\mathcal{B}$ ci-dessus est bien une base et fournit donc une solution au problème posé (et d'après notre analyse c'est la seule).

Une autre solution possible consisterait à rechercher une matrice inversible P (la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$) vérifiant :

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; P^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \; \text{et} \; P^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

ce qui conduit à la même famille $\mathcal{B}$.

Exercice 6. Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ sachant que $(2\alpha^2 - 1, \alpha, 2 - 4\alpha)$ n'est pas combinaison linéaire de la famille :

$$(1,2,-1), \; (-1, \alpha - 2, \alpha + 1), \; (2\alpha, 4\alpha - 1, -\alpha - 2).$$

Solution: Commençons par calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2\alpha \\ 2 & \alpha - 2 & 4\alpha - 1 \\ -1 & \alpha + 1 & -\alpha - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2\alpha \\ 0 & \alpha & -1 \\ 0 & \alpha & \alpha - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ \alpha & \alpha - 2 \end{vmatrix} = \alpha(\alpha - 1).$$

Par conséquent, si $\alpha \neq 0, 1$, la famille proposée est une base de $\mathbb{R}^3$. Une telle valeur de α ne convient donc pas pour le problème posé, car alors tout élément de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de la famille (et donc en particulier celui donné dans l'énoncé). A ce stade, il reste donc deux candidats-solutions pour α, à savoir 0 et 1.

Etudions alors le cas $\alpha = 0$. On doit décider si $(-1, 0, 2)$ est combinaison linéaire de :

$$(1, 2, -1),\ (-1, -2, 1),\ (0, -1, -2),$$

ou, ce qui revient au même, du fait que $(-1, -2, 1) = -(1, 2, -1)$, de :

$$(1, 2, -1),\ (0, -1, -2),$$

Or, en combinant ces deux éléments, la seule manière de mettre la première coordonnée à -1 et la deuxième à 0 est de former la combinaison linéaire :

$$-(1, 2, -1) - 2(0, -1, -2) = (-1, 0, 5) \neq (-1, 0, 2).$$

Par conséquent, la valeur $\alpha = 0$ est solution du problème posé. Pour $\alpha = 1$, on doit regarder si $(1, 1, -2)$ est combinaison linéaire de :

$$(1, 2, -1),\ (-1, -1, 2),\ (2, 3, -3),$$

ce qui est clairement le cas. On en déduit que $\alpha = 1$ ne convient pas. En conclusion, la seule solution au problème posé est $\alpha = 0$.

Exercice 7. Est-il vrai que, pour tout choix d'éléments v_1, v_2, v_3 de $\mathbb{R}^3$ on a :

a. $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) \cup \mathrm{Vect}(v_2, v_3) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$?

b. si $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$ alors v_1, v_2, v_3 l'est aussi.

c. $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) \cap \mathrm{Vect}(v_1, v_3) = \mathrm{Vect}(v_1)$?

d. si v_1, v_2, v_3 est une base de $\mathbb{R}^3$ alors $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1$ l'est aussi.

Si vous pensez que c'est vrai expliquez pourquoi. Si vous pensez que c'est faux, donnez un contre-exemple.

Solution:

a. C'est faux. Prenons par exemple :

$$v_1 = (1, 0, 0),\ v_2 = (0, 1, 0),\ v_3 = (0, 0, 1).$$

Alors $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$ n'est pas égal à la réunion de $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ (qui est le plan vectoriel d'équation $z = 0$) et de $\mathrm{Vect}(v_2, v_3)$ (qui est le plan vectoriel d'équation $x = 0$) : par exemple, $(1, 0, 1)$ appartient à $\mathbb{R}^3$ mais pas à la réunion (il n'a "ni son x ni son z nul").

b. C'est vrai. En effet, si v_1, v_2, v_3 se trouvaient sur un même plan vectoriel, alors $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3$ s'y trouveraient aussi, si bien que cette famille ne pourrait être une base de $\mathbb{R}^3$. L'hypothèse entraine donc que v_1, v_2, v_3 ne se trouvent pas sur un même plan vectoriel, ou, autrement dit, qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^3$.

c. C'est faux. Prenons par exemple :

$$v_1 = (1, 0, 0),\ v_2 = (0, 1, 0),\ v_3 = (0, 1, 0).$$

Alors :

$$\mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \mathrm{Vect}(v_1, v_3) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \cap \mathrm{Vect}(v_1, v_3)$$

est le plan vectoriel d'équation $z = 0$. Cet ensemble est différent de $\mathrm{Vect}(v_1)$, qui est une droite vectorielle.

d. C'est faux. Prenons par exemple :

$$v_1 = (1, 0, 0),\ v_2 = (0, 1, 0),\ v_3 = (0, 0, 1)$$

et posons :

$$w_1 = v_1 - v_2 = (1, -1, 0),\ w_2 = v_2 - v_3 = (0, 1, -1),\ w_3 = (-1, 0, 1).$$

Cette famille n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$: tous ses éléments se trouvent sur le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$.