Série 14

Exercice 1. Déterminer le rang la matrice A ci-dessous et en écrire une décomposition colonne-ligne minimale :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -14 & 21 & -7 \\ 10 & -15 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solution: La matrice A est non nulle. De plus, ses trois colonnes sont deux-à-deux proportionnelles. Par exemple, on peut écrire les deux premières colonnes comme multiples scalaires de la troisième :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 21 \\ -15 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que A est de rang 1. Les relations de proportionnalité écrites ci-dessus permettent alors directement d'écrire :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -14 & 21 & -7 \\ 10 & -15 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. On donne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le déterminant de A. Quel est le rang de A ?

b. Donner une décomposition colonne-ligne minimale de A.

Solution:

a. Utilisons par exemple le -1 en position $(1, 2)$ pour "nettoyer" la première ligne, via les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + 3C_2$ et $C_3 \leftarrow C_3 + 5C_2$:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 16 & 5 & 32 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

L'opération $C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1$ mène alors à :

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 16 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

le déterminant d'une matrice étant nul dès que celle-ci possède une colonne entièrement nulle. Le déterminant de A étant nul, on sait que cette matrice est de rang inférieur ou égal à 2. Par ailleurs, on peut trouver dans A deux colonnes non proportionnelles, ce qui montre qu'elle est de rang supérieur ou égal à 2. En conclusion, A est de rang 2.

b. Pour écrire une décomposition colonne-ligne de A de longueur 2, on va chercher à exprimer l'une de ses colonnes en fonction des deux autres. Or, en utilisant les opérations sur les colonnes trouvées en a. on trouve la relation :

$$2\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient finalement :

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}}_{2\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On donne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le déterminant de A.

b. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer la matrice inverse A^{-1}.

Solution:

a. Commençons par effectuer l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, qui laisse invariant le déterminant. On trouve :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Ensuite, appliquons l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$ afin de faire apparaitre une matrice triangulaire supérieure, pour laquelle le déterminant n'est autre que le produit des coefficients diagonaux :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1.$$

b. Pour trouver l'inverse, on résout de manière générale le système linéaire 3×3 de matrice A. On peut utiliser pour cela les mêmes opérations sur les lignes que l'on a identifiées en a. :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 2y - z = a \\ y + 2z = b \\ -x + y + 6z = c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 2y - z = a \\ y + 2z = b \\ 3y + 5z = a + c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$$

$$\cdots \begin{cases} x + 2y - z = a \\ y + 2z = b \\ -z = a - 3b + c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -2y + z + a = -4a + 13b - 5c \\ y = b - 2z = 2a - 5b + 2c \\ z = -a + 3b - c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 13 & -5 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 13 & -5 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, déterminer à quelle condition la matrice proposée est inversible et, sous cette condition, calculer l'inverse :

a. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

Solution:

a. Commençons par calculer le déterminant de la matrice proposée. En développant selon la première ligne, on trouve :

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma.$$

La condition pour que cette matrice soit inversible est donc que le produit $\alpha\beta\gamma$ soit non nul, ou, autrement dit, que chacun des coefficients α, β, γ soit non nul. Sous cette condition, pour trouver l'inverse, on résout le système linéaire 3×3 générique suivant :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha x = a \\ \beta y = b \\ \gamma z = c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\alpha} a \\ y = \frac{1}{\beta} b \\ z = \frac{1}{\gamma} c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

On en déduit que l'inverse recherché est :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}.$$

b. Commençons par calculer le déterminant de la matrice proposée. En développant selon la première ligne, on trouve :

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ \gamma & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\alpha \begin{vmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma.$$

La condition pour que cette matrice soit inversible est donc la même qu'en a. : le produit $\alpha\beta\gamma$ doit être non nul, ou, autrement dit, chacun des coefficients α, β, γ doit être non nul. Sous cette condition, pour trouver l'inverse, on résout le système linéaire 3×3 générique suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha y = a \\ \beta z = b \\ \gamma x = c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\gamma} c \\ y = \frac{1}{\alpha} a \\ z = \frac{1}{\beta} b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

On en déduit que l'inverse recherché est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 0 \end{pmatrix}.$$

c. Commençons par calculer le déterminant de la matrice proposée. En développant selon la première colonne, on trouve :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ 0 & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma.$$

La condition pour que cette matrice soit inversible est donc la même qu'en a. et b. : le produit $\alpha\beta\gamma$ doit être non nul, ou, autrement dit, chacun des coefficients α, β, γ doit être non nul. Sous cette condition, pour trouver l'inverse, on résout le système linéaire 3×3 générique suivant :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = a \\ \beta y + \gamma z = b \\ \gamma z = c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\alpha} a - \frac{1}{\alpha} b \\ y = \frac{1}{\beta} b - \frac{1}{\beta} c \\ z = \frac{1}{\gamma} c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} & -\frac{1}{\beta} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

On en déduit que l'inverse recherché est :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} & -\frac{1}{\beta} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. On donne, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha + 1 & -1 \\ \alpha^2 - 2\alpha - 1 & \alpha^2 + \alpha + 2 & \alpha - 3 \\ \alpha^2 + 2\alpha - 1 & -1 - 3\alpha & \alpha + 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang de A en fonction de la valeur du paramètre α, ainsi qu'une décomposition colonne-ligne minimale de A.

Solution: Cherchons à calculer le déterminant de la matrice A. Pour cela, commençons par effectuer l'opération $C_1 \leftarrow C_1 - \alpha C_3$, qui ne modifie pas le déterminant. On obtient :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -\alpha & \alpha+1 & -1 \\ \alpha^2-2\alpha-1 & \alpha^2+\alpha+2 & \alpha-3 \\ \alpha^2+2\alpha-1 & -1-3\alpha & \alpha+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha+1 & -1 \\ \alpha-1 & \alpha^2+\alpha+2 & \alpha-3 \\ \alpha-1 & -1-3\alpha & \alpha+1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)\begin{vmatrix} 0 & \alpha+1 & -1 \\ 1 & \alpha^2+\alpha+2 & \alpha-3 \\ 1 & -1-3\alpha & \alpha+1 \end{vmatrix},$$

la dernière égalité étant obtenue par extraction du facteur $\alpha - 1$ de la première colonne. Appliquons ensuite l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ et développons selon la première colonne. On trouve :

$$\det(A) = (\alpha-1)\begin{vmatrix} 0 & \alpha+1 & -1 \\ 0 & \alpha^2+4\alpha+3 & -4 \\ 1 & -1-3\alpha & \alpha+1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)\begin{vmatrix} \alpha+1 & -1 \\ \alpha^2+4\alpha+3 & -4 \end{vmatrix}.$$

Sur le déterminant 2×2 obtenu, effectuons à présent l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$. On trouve alors :

$$\det(A) = (\alpha-1)\begin{vmatrix} \alpha+1 & -1 \\ \alpha^2-1 & 0 \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2(\alpha+1).$$

On en déduit déjà que si α est différent de 1 et -1 alors le déterminant de A est non nul, si bien que A est de rang 3. Dans ce cas une décomposition colonne-ligne minimale de A est par exemple donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha+1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha^2-2\alpha-1 & \alpha^2+\alpha+2 & \alpha-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha^2+2\alpha-1 & -1-3\alpha & \alpha+1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\alpha = 1$, la matrice A vaut :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

On observe qu'elle est non nulle et que ses lignes sont deux-à-deux proportionnelles (tout comme ses colonnes). Elle est donc de rang 1, et une décomposition colonne-ligne minimale de A est par exemple donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\alpha = -1$, la matrice A vaut :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle est de rang inférieur ou égal à 2 (car son déterminant est nul). De plus A est non nulle et ses lignes ne sont pas deux-à-deux proportionnelles (tout comme ses colonnes). Elle n'est donc ni de rang 0, ni de rang 1. Par conséquent, elle est de rang 2. Pour écrire une décomposition colonne-ligne minimale de A, partons de la décomposition :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(qui n'est pas minimale car de longueur 3) et observons par exemple que la troisième colonne est égale à la somme des autres, multipliée par -1. On obtient alors :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \left(-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Etant donnés $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on donne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le déterminant de A.

b. A quelle condition sur les paramètres α, β, γ la matrice A est-elle inversible ? Calculer alors la matrice inverse.

Solution:

a. En effectuant d'abord les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, puis en développant selon la première colonne, on obtient :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & \beta-\alpha & \beta-\alpha \\ 0 & \beta-\alpha & \gamma-\alpha \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \beta-\alpha & \beta-\alpha \\ \beta-\alpha & \gamma-\alpha \end{vmatrix} = \alpha(\beta-\alpha) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \beta-\alpha & \gamma-\alpha \end{vmatrix} = \alpha(\beta-\alpha)(\gamma-\beta).$$

b. La condition pour que A soit inversible est que son déterminant soit non nul :

$$\alpha(\beta-\alpha)(\gamma-\beta) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \neq 0 \text{ et } \alpha \neq \beta \text{ et } \beta \neq \gamma.$$

Pour trouver sous cette condition l'inverse de A, on résout le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha x + \alpha y + \alpha z = a \\ \alpha x + \beta y + \beta z = b \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha(x+y+z) = a \\ (\beta-\alpha)(y+z) = -a+b \\ (\gamma-\beta)z = -b+c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$$

$$\cdots \begin{cases} x+y+z = \frac{1}{\alpha}a \\ y+z = \frac{1}{\alpha-\beta}a + \frac{1}{\beta-\alpha}b \\ z = \frac{1}{\beta-\gamma}b + \frac{1}{\gamma-\beta}c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta-\alpha})a + \frac{1}{\alpha-\beta}b \\ y = \frac{1}{\alpha-\beta}a + (\frac{1}{\beta-\alpha} + \frac{1}{\gamma-\beta})b + \frac{1}{\beta-\gamma}c \\ z = \frac{1}{\beta-\gamma}b + \frac{1}{\gamma-\beta}c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$$

$$\cdots \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta-\alpha} & \frac{1}{\alpha-\beta} & 0 \\ \frac{1}{\alpha-\beta} & \frac{1}{\beta-\alpha} + \frac{1}{\gamma-\beta} & \frac{1}{\beta-\gamma} \\ 0 & \frac{1}{\beta-\gamma} & \frac{1}{\gamma-\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta-\alpha} & \frac{1}{\alpha-\beta} & 0 \\ \frac{1}{\alpha-\beta} & \frac{1}{\beta-\alpha} + \frac{1}{\gamma-\beta} & \frac{1}{\beta-\gamma} \\ 0 & \frac{1}{\beta-\gamma} & \frac{1}{\gamma-\beta} \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. On considère un système linéaire 3×3 dont on note A la matrice des coefficients :

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x + \alpha_{1,2}y + \alpha_{1,3}z = a \\ \alpha_{2,1}x + \alpha_{2,2}y + \alpha_{2,3}z = b \\ \alpha_{3,1}x + \alpha_{3,2}y + \alpha_{3,3}z = c \end{cases}$$

a. En supposant que (x, y, z) est solution, calculer les déterminants suivants en fonction de x, y et z :

$$\begin{vmatrix} a & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ b & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ c & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & a & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & b & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & c & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & a \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & b \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & c \end{vmatrix}.$$

b. Sous l'hypothèse que $\det(A) \neq 0$, en déduire une formule générale pour la matrice inverse A^{-1} de A.

Solution:

a. Cherchons par exemple à calculer le premier déterminant (les deux autres se calculent exactement de la même manière) :

$$\begin{vmatrix} a & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ b & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ c & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}.$$

Comme (x, y, z) est solution du système, on a déjà :

$$\begin{vmatrix} a & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ b & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ c & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1}x + \alpha_{1,2}y + \alpha_{1,3}z & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1}x + \alpha_{2,2}y + \alpha_{2,3}z & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1}x + \alpha_{3,2}y + \alpha_{3,3}z & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}.$$

Sur le déterminant obtenu, appliquons à présent les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - yC_2$ et $C_1 \leftarrow C_1 - zC_3$. On trouve :

$$\begin{vmatrix} a & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ b & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ c & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1}x & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1}x & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1}x & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}.$$

On peut alors extraire le facteur x de la première colonne :

$$\begin{vmatrix} a & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ b & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ c & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} = x \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}}_{\det(A)}.$$

b. Supposons que le déterminant de A est non nul. Dans ce cas, on sait que le système possède une unique solution pour tout choix de second membre. A est inversible et la matrice inverse vérifie :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Or, le résultat obtenu en a. permet de décrire x en fonction de a, b et c. En effet, on a :

$$x = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ b & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ c & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} = \frac{1}{\det(A)} (\begin{vmatrix} \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \end{vmatrix} c)$$

la dernière égalité étant obtenue en développant par rapport à la première colonne. Nous venons en fait donc de découvrir la formule pour la première ligne de A^{-1}. En raisonnant de même pour la deuxième et la troisième ligne on trouve finalement :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,3} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Cette formule porte le nom du mathématicien suisse Gabriel Cramer (1704-1752).