Série 13

Exercice 1. On donne les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 7 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le coefficient en position $(2,1)$ de la matrice proposée :

a. $2A - 3B$ b. AB c. $B^2 + BA$.

Solution:

a. Par définition de l'addition et de la multiplication scalaire sur les matrices, on trouve $2 \times 2 - 3 \times 1 = 1$ en position $(2,1)$ dans la matrice $2A - 3B$ (tout se passe coefficient-à-coefficient).

b. Pour trouver le coefficient en position $(2,1)$ dans la matrice AB, on utilise la deuxième ligne de A et la première colonne de B. On trouve $2 \times 0 + 0 + 7 \times 7 = 49$.

c. Observons que :

$$B^2 + BA = B(B + A).$$

Pour connaitre le coefficient en position $(2,1)$ dans cette matrice, on utilise donc la deuxième ligne de B et la première colonne $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ de $A + B$. On trouve $1 \times 3 + (-3) \times 3 + 4 \times 5 = 14$.

Remarque : une autre solution (plus coûteuse car faisant intervenir plus de produits matriciels) consiste à rechercher les coefficients $(2,1)$ de B^2 et BA, puis à les additionner. On trouve $25 - 11 = 14$.

Exercice 2. Calculer les déterminants suivants :

a. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 11 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -6 \\ 17 & 5 & -3 \end{vmatrix}$.

Solution: D'après le cours, il y a plusieurs méthodes pour aborder le calcul d'un déterminant : application directe de la formule, développement par rapport à une ligne ou une colonne, ou encore utilisation des propriétés globales de la fonction déterminant (extraction d'un facteur apparaissant dans une ligne ou une colonne donnée / antisymétrie / invariance par ajout à une ligne ou une colonne d'un multiple scalaire d'une autre ligne ou colonne). Le plus efficace étant par ailleurs souvent de combiner ces différentes approches.

a. Développons le déterminant proposé selon la première colonne. On obtient :

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60.$$

b. En effectuant successivement les opérations $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 + C_2$ (dont on sait qu'elles ne modifient pas le déterminant), on trouve :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

La dernière égalité est obtenue par exemple en développant selon la dernière colonne, ou encore par extraction du facteur 0 de la troisième colonne.

c. L'idée développée ici est d'utiliser le 1 qui se trouve en position $(2,2)$ pour "nettoyer" la deuxième colonne (c'est-à-dire créer des 0 ailleurs dans cette colonne). Pour cela, effectuons les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$ (on a vu au cours que de telles opérations ne changent pas la valeur du déterminant). On obtient :

$$\begin{vmatrix} 11 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -6 \\ 17 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 23 \\ 3 & 1 & -6 \\ 2 & 0 & 27 \end{vmatrix}.$$

En développant maintenant selon la deuxième colonne, on trouve :

$$\begin{vmatrix} 11 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -6 \\ 17 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 23 \\ 2 & 27 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 23 \\ 1 & 27 \end{vmatrix} = 2(27-23) = 8.$$

Exercice 3. Sachant que $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \rho \\ \lambda & \mu & \sigma \end{vmatrix} = 3$, calculer chacun des déterminants suivants :

a. $\begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & \rho \\ \alpha+2\lambda & \beta+2\mu & \gamma+2\sigma \\ \lambda & \mu & \sigma \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 2\beta & \gamma & \alpha \\ 2\mu & \sigma & \lambda \\ 2\varepsilon & \rho & \delta \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 3(\delta-\varepsilon) & 3\rho & \varepsilon \\ \alpha-\beta & \gamma & \frac{1}{3}\beta \\ \lambda-\mu & \sigma & \frac{1}{3}\mu \end{vmatrix}$.

Solution: L'idée exploitée ici est d'utiliser les propriétés connues de la fonction déterminant afin de relier le déterminant qui nous intéresse à celui donné initialement.

a. On a :

$$\begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & \rho \\ \alpha+2\lambda & \beta+2\mu & \gamma+2\sigma \\ \lambda & \mu & \sigma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & \rho \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \sigma \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \rho \\ \lambda & \mu & \sigma \end{vmatrix} = -3,$$

la première égalité étant obtenue via l'opération $L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_3$ et la deuxième par l'échange de L_1 et L_2.

b. Cette fois-ci, on trouve :

$$\begin{vmatrix} 2\beta & \gamma & \alpha \\ 2\mu & \sigma & \lambda \\ 2\varepsilon & \rho & \delta \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \beta & \gamma & \alpha \\ \mu & \sigma & \lambda \\ \varepsilon & \rho & \delta \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} \beta & \gamma & \alpha \\ \varepsilon & \rho & \delta \\ \mu & \sigma & \lambda \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \beta & \alpha & \gamma \\ \varepsilon & \delta & \rho \\ \mu & \lambda & \sigma \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \rho \\ \lambda & \mu & \sigma \end{vmatrix} = -6,$$

la première égalité étant obtenue par extraction du facteur 2 de la première colonne, puis les suivantes par échange de deux lignes ou de deux colonnes (ce qui change le signe à chaque fois).

c. On trouve ici :

$$\begin{vmatrix} 3(\delta-\varepsilon) & 3\rho & \varepsilon \\ \alpha-\beta & \gamma & \frac{1}{3}\beta \\ \lambda-\mu & \sigma & \frac{1}{3}\mu \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3(\delta-\varepsilon) & 3\rho & 3\varepsilon \\ \alpha-\beta & \gamma & \beta \\ \lambda-\mu & \sigma & \mu \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3\delta & 3\rho & 3\varepsilon \\ \alpha & \gamma & \beta \\ \lambda & \sigma & \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta & \rho & \varepsilon \\ \alpha & \gamma & \beta \\ \lambda & \sigma & \mu \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \beta \\ \delta & \rho & \varepsilon \\ \lambda & \sigma & \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \rho \\ \lambda & \mu & \sigma \end{vmatrix} = 3.$$

Dans cette suite d'égalités, on commence par extraire le facteur $\frac{1}{3}$ de la troisième colonne, on additionne la troisième colonne à la première, on extrait le facteur 3 de la première ligne, puis on échange successivement les deux premières lignes entre elles et les deux dernières colonnes entre elles.

Exercice 4. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 11 & 12 & 13 \\ 113 & 125 & 138 \end{vmatrix}.$$

Solution: On commence par extraire le facteur 10, qui est clairement commun à tous les coefficients sur la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 11 & 12 & 13 \\ 113 & 125 & 138 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 11 & 12 & 13 \\ 113 & 125 & 138 \end{vmatrix}.$$

On effectue alors l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ dans le déterminant restant, ce qui n'en modifie pas la valeur :

$$\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 11 & 12 & 13 \\ 113 & 125 & 138 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 10 & 10 \\ 113 & 125 & 138 \end{vmatrix}.$$

On peut alors extraire le facteur 10 de la deuxième ligne pour obtenir :

$$\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 11 & 12 & 13 \\ 113 & 125 & 138 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 113 & 125 & 138 \end{vmatrix}.$$

Ensuite, on applique l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ pour trouver :

$$\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 11 & 12 & 13 \\ 113 & 125 & 138 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 113 & 125 & 138 \end{vmatrix}.$$

En développant selon la première ligne on obtient maintenant :

$$\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 11 & 12 & 13 \\ 113 & 125 & 138 \end{vmatrix} = 100(-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 113 & 138 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 113 & 125 \end{vmatrix}) = 100(-25 + 2 \cdot 12) = -100.$$

Exercice 5. Calculer les déterminants suivants :

a. $\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} \beta & \gamma & \alpha \\ \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{vmatrix}$.

Solution:

a. Développons le déterminant proposé selon la première colonne. On obtient :

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma.$$

b. Développons le déterminant proposé selon la troisième ligne :

$$\begin{vmatrix} \beta & \gamma & \alpha \\ \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{vmatrix} = \gamma \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \beta & 0 \end{vmatrix} = -\alpha\beta\gamma.$$

c. Développons par exemple selon la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{vmatrix} = -\alpha \begin{vmatrix} -\alpha & \gamma \\ -\beta & 0 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} -\alpha & 0 \\ -\beta & -\gamma \end{vmatrix} = -\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma = 0.$$

Le déterminant d'une matrice antisymétrique (c'est-à-dire égale à l'opposée de sa transposée) de taille 3×3 est donc nul.

Exercice 6. Etant donnés $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, calculer sous forme factorisée le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(\alpha) & \cos(\beta) & \cos(\gamma) \\ \cos(2\alpha) & \cos(2\beta) & \cos(2\gamma) \end{vmatrix}.$$

Indication : on pourra utiliser une formule de trigonométrie.

Solution: Effectuons d'abord les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ puis développons par rapport à la première ligne. On obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(\alpha) & \cos(\beta) & \cos(\gamma) \\ \cos(2\alpha) & \cos(2\beta) & \cos(2\gamma) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos(\alpha) & \cos(\beta)-\cos(\alpha) & \cos(\gamma)-\cos(\alpha) \\ \cos(2\alpha) & \cos(2\beta)-\cos(2\alpha) & \cos(2\gamma)-\cos(2\alpha) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\beta)-\cos(\alpha) & \cos(\gamma)-\cos(\alpha) \\ \cos(2\beta)-\cos(2\alpha) & \cos(2\gamma)-\cos(2\alpha) \end{vmatrix}.$$

D'après la formule de duplication vue en cours de trigonométrie, on a :

$$\cos(2\beta) - \cos(2\alpha) = (2\cos^2(\beta) - 1) - (2\cos^2(\alpha) - 1) = 2(\cos(\beta) - \cos(\alpha))(\cos(\beta) + \cos(\alpha)),$$

et, de la même façon :

$$\cos(2\gamma) - \cos(2\alpha) = 2(\cos(\gamma) - \cos(\alpha))(\cos(\gamma) + \cos(\alpha)).$$

On en déduit :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(\alpha) & \cos(\beta) & \cos(\gamma) \\ \cos(2\alpha) & \cos(2\beta) & \cos(2\gamma) \end{vmatrix} = 2(\cos(\beta) - \cos(\alpha))(\cos(\gamma) - \cos(\alpha)) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \cos(\beta)+\cos(\alpha) & \cos(\gamma)+\cos(\alpha) \end{vmatrix}.$$

Finalement on trouve donc :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(\alpha) & \cos(\beta) & \cos(\gamma) \\ \cos(2\alpha) & \cos(2\beta) & \cos(2\gamma) \end{vmatrix} = 2(\cos(\beta) - \cos(\alpha))(\cos(\gamma) - \cos(\alpha))(\cos(\gamma) - \cos(\beta)).$$

Exercice 7. Etant donnés $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta + \gamma = 0 \text{ ou } \alpha = \beta = \gamma.$$

Indication : que vaut la somme des lignes dans le déterminant étudié ?

Solution: Calculons le déterminant étudié, en essayant au maximum de l'obtenir sous forme factorisée. Commençons par effectuer successivement les opérations $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, qui ne modifient pas la valeur du déterminant. On trouve alors :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

la dernière égalité étant obtenue en extrayant le facteur $\alpha + \beta + \gamma$ de la troisième ligne. Effectuons à présent les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$, puis développons par rapport à la dernière ligne :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma) \begin{vmatrix} \alpha & \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \gamma & \alpha-\gamma & \beta-\gamma \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma) \begin{vmatrix} \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \alpha-\gamma & \beta-\gamma \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)((\beta-\alpha)(\beta-\gamma) + (\alpha-\gamma)^2).$$

Finalement, on obtient donc :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma).$$

On voit que ce déterminant est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul. En réécrivant le deuxième sous la forme :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma = \tfrac{1}{2}((\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\gamma)^2 + (\beta-\gamma)^2)$$

on voit que celui-ci est nul si et seulement si $\alpha = \beta = \gamma$, ce qui permet de conclure.

Exercice 8. Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ on a l'égalité :

$$\det(A) = \det({}^tA).$$

Solution: Notons :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix} \text{ si bien que } {}^tA = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{2,1} & \alpha_{3,1} \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} & \alpha_{3,2} \\ \alpha_{1,3} & \alpha_{2,3} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Développons le déterminant de A par rapport à sa première colonne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} \alpha_{1,1} - \begin{vmatrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} \alpha_{2,1} + \begin{vmatrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \end{vmatrix} \alpha_{3,1},$$

et le déterminant de ${}^tA$ par rapport à sa première ligne :

$$\det({}^tA) = \begin{vmatrix} \alpha_{2,2} & \alpha_{3,2} \\ \alpha_{2,3} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} \alpha_{1,1} - \begin{vmatrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{3,2} \\ \alpha_{1,3} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} \alpha_{2,1} + \begin{vmatrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} \\ \alpha_{1,3} & \alpha_{2,3} \end{vmatrix} \alpha_{3,1}.$$

Pour obtenir l'égalité voulue il n'y plus qu'à constater que :

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{2,2} & \alpha_{3,2} \\ \alpha_{2,3} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}}_{=\alpha_{2,2}\alpha_{3,3}-\alpha_{2,3}\alpha_{3,2}}, \quad \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{3,2} \\ \alpha_{1,3} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}}_{=\alpha_{1,2}\alpha_{3,3}-\alpha_{1,3}\alpha_{3,2}}, \quad \text{et} \quad \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} \\ \alpha_{1,3} & \alpha_{2,3} \end{vmatrix}}_{=\alpha_{1,2}\alpha_{2,3}-\alpha_{1,3}\alpha_{2,2}}.$$