Série 9

Exercice 1. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to (x+5y, x-3y).$$

a. Calculer le rang de f. En déduire son image et son noyau.

b. L'application f est-elle bijective ? Si oui, en donner l'application réciproque f^{-1}.

Exercice 2. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to (\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{2}y, 2x+3y).$$

a. Quel est le rang de f ? Donner des équations cartésiennes de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

b. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, décrire l'ensemble $f^{-1}(\{(a,b)\})$ des antécédents de (a,b) par f.

Exercice 3. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to (5x-2y, 2x-y) \ \text{ ainsi que } \ \mathcal{B} = (1,2),(3,5).$$

a. Donner la matrice de f en base canonique.

b. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_{\text{can}}$ à $\mathcal{B}$.

c. Pour tout $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $[v]_{\mathcal{B}}$ et écrire la décomposition correspondante de v dans la base $\mathcal{B}$.

d. Calculer de deux façons différentes la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ représentant f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \to (3x-9y, x-3y).$$

a. Quel est le rang de f ? Déterminer aussi son image et son noyau.

b. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indication : si l'on note $\mathcal{B} = v_1, v_2$, commencer par écrire $f(v_1)$ et $f(v_2)$ en fonction de v_1 et v_2.

c. Pour la base $\mathcal{B}$ que vous avez trouvée au b., vérifier, pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, la validité de la formule :

$$[f(v)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}$$

Exercice 5. On donne, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to ((5-\alpha)x + (16-5\alpha)y, (5-3\alpha)x - 2y).$$

Trouver α sachant que $(2,-4)$ n'a pas d'antécédent par f.

Exercice 6. On sait que l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vérifie :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad \mathcal{B} = (1-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}), (2+3\sqrt{2}, 1+7\sqrt{2}).$$

On ne demande pas de montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

a. Quel est le rang de f ? Donner alors les dimensions du noyau et de l'image de f.

b. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$. *Indication : commencer par écrire la relation qui existe entre* $[f(v)]_{\mathcal{B}}$ *et* $[v]_{\mathcal{B}}$.

c. Calculer une équation de $\operatorname{Im} f$.

d. Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle f a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Exercice 7. Dans chacun des cas suivants, déterminer si possible une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vérifiant les propriétés données. Si ce n'est pas possible, expliquer pourquoi.

a. $(1,2) \in \operatorname{Ker} f$ et $(4,2) \in \operatorname{Im} f$ b. $\{(1,-1),(-2,1)\} \subset f^{-1}(\{(1,1)\})$ c. $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ et $(4,-3) \in \operatorname{Ker} f$.

Indication : quel est le rang de f ?

Exercice 8. On considère une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$[f]_{\mathcal{B}} \text{ indépendante de la base } \mathcal{B} \text{ de } \mathbb{R}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \alpha \in \mathbb{R},\ f = \alpha\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\ .$$

Indication : on pourra s'inspirer de l'exercice 5 de la série 7.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$, $\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$ b. oui, $f^{-1}(x,y) = \frac{1}{8}(3x+5y, x-y)$.
Ex. 2 : a. 1, $\operatorname{Im} f : y = 6x$, $\operatorname{Ker} f : 2x+3y = 0$.
Ex. 3 : a. $\left(\begin{smallmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, b. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, c. $\left(\begin{smallmatrix} -5x+3y \\ 2x-y \end{smallmatrix}\right)$, d. $\left(\begin{smallmatrix} -5 & -22 \\ 2 & 9 \end{smallmatrix}\right)$.
Ex. 4 : a. 1, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((3,1))$.
Ex. 5 : 2.
Ex. 6 : a. 1, b. $(-1-9\sqrt{2}, 7-11\sqrt{2})$, c. $(6+22\sqrt{2})x = (7+8\sqrt{2})y$.
Ex. 7 : a., b., possible, c. impossible.