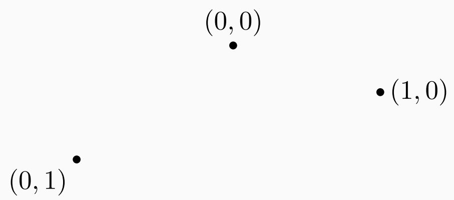
Série 8

Exercice 1. Sur une feuille de papier, reproduire (approximativement) la figure suivante :



a. Placer $(3,-1)$ sur le dessin. Calculer ensuite $-\frac{1}{2}(3,-1)$ et donner une construction géométrique du résultat.

b. Placer $(2,1)$ et $(-1,-1)$ sur le dessin. Calculer $(2,1)+(-1,-1)$ et donner une construction géométrique du résultat.

c. Représenter sur le dessin la droite vectorielle $\mathrm{Vect}((3,2))$ et en donner une équation.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^2$, on donne la famille :

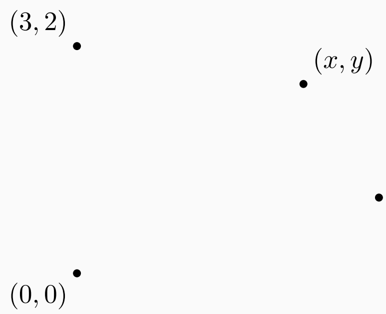
$$\mathcal{B} = (3,2),(4,1).$$

a. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_{\text{can}}$ à $\mathcal{B}$.

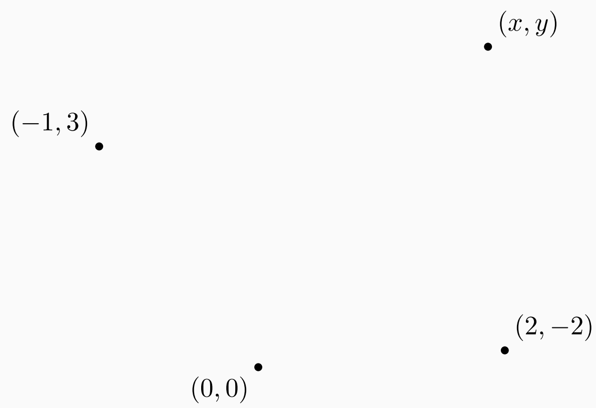
b. Quel élément de $\mathbb{R}^2$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$?

c. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $[(x,y)]_{\mathcal{B}}$ et écrire la décomposition correspondante de (x,y) dans la base $\mathcal{B}$.

d. Faire apparaitre géométriquement la décomposition trouvée au c. sur la figure ci-dessous.



Exercice 3. Placer $(x,0)$ et $(0,y)$ sur le dessin ci-dessous.



Indication : où se trouvent $(1,0)$ *et* $(0,1)$ *?*

Exercice 4. Donner un exemple de base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie :

a. que l'on a l'égalité $[(0,1)]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

b. en plus de la condition du a., que la première coordonnée de $(2,1)$ en base $\mathcal{B}$ est nulle.

c. en plus des conditions du a. et du b., que les deux coordonnées de $(1,1)$ en base $\mathcal{B}$ sont égales.

Exercice 5. Déterminer la valeur du réel α sachant que l'on a l'inclusion :

$$\mathrm{Vect}((1,\alpha+4),(\alpha,5\alpha+6)) \subset \mathrm{Vect}((\alpha-1,\alpha^2+5)).$$

Exercice 6. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est-elle linéaire ? Si oui, en donner la matrice (dans la base canonique).

a. $f : (x,y) \to (x^2-y^2, xy)$ b. $f : (x,y) \to (x-y, 2x+y)$ c. $f : (x,y) \to (x+1, y)$.

Exercice 7. On donne $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linéaires de matrices A et B (dans la base canonique) ainsi que $\omega \in \mathbb{R}$. On pose :

a. $\begin{array}{l} f+g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \to f(x,y)+g(x,y) \end{array}$ b. $\begin{array}{l} \omega f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \to \omega f(x,y) \end{array}$ c. $\begin{array}{l} f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \to f(g(x,y)). \end{array}$

Montrer que les applications ainsi définies sont linéaires et calculer leurs matrices en fonction de A et B.

Exercice 8. On donne une application quelconque $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$f \text{ linéaire} \iff f \text{ respecte l'addition et la multiplication scalaire de } \mathbb{R}^2.$$

Indication : pour " $\Leftarrow$ ", décomposer (x,y) dans la base canonique puis appliquer f.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, b. $(1,0)$.
Ex. 2 : a. $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, b. $(5,5)$.
Ex. 4 : c. $(1,\frac{3}{2}), (1,\frac{1}{2})$.
Ex. 5 : 3.
Ex. 6 : a. non, b. oui, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ c. non.