Série 7

Exercice 1. Dans chacun des cas, effectuer le calcul proposé dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$:

a. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ b. $2\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ c. ${}^t\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Dans chacun des cas ci-dessous, calculer si possible le produit proposé :

a. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on donne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le déterminant, le rang et la trace de A.

b. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

Exercice 4. Dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on donne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le déterminant, le rang et la trace de A.

b. Décomposer A comme produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne.

Exercice 5. Dans cet exercice, on souhaite identifier le *centre de* $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ qui est par définition l'ensemble :

$$Z(\mathrm{M}_2(\mathbb{R})) = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \quad | \quad \forall B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ AB = BA\}.$$

Comme le produit matriciel n'est pas commutatif, on sait déjà que $Z(\mathrm{M}_2(\mathbb{R})) \neq \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

a. On appelle *matrice scalaire* une matrice du type αI_2, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'une matrice scalaire appartient à $Z(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}))$.

b. Réciproquement, soit $A \in Z(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}))$. Calculer AB et BA, avec :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En déduire que certains coefficients de la matrice A sont nuls. Utiliser ensuite d'autres cas particuliers pour B afin de montrer que A est une matrice scalaire.

Exercice 6. Montrer que pour toutes matrices A et B dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on a les égalités :

a. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ b. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ c. ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Exercice 7. On donne une matrice $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer alors que :

$$\det(A) = \operatorname{tr}(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A^2 = 0.$$

Indication : on pourra raisonner par double implication.

Exercice 8. Montrer que, pour toutes matrices A, B et C dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on a les égalités :

a. $(A+B)+C = A+(B+C)$ b. $(A+B)C = AC+BC$ c. $(AB)C = A(BC)$.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, b. $\begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, c. $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
Ex. 2 : a. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, b. (7), c. $\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, d. non défini.
Ex. 3 : a. $3, 2, -4$, b. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.
Ex. 4 : a. $0, 1, \frac{11}{3}$, b. $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} = \cdots$