Série 4

Exercice 1. On donne $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ et $A = \{\alpha, \beta, \delta\}$, ainsi que l'application $f : E \to E$ définie par :

$$f(\alpha) = \gamma,\ f(\beta) = \alpha,\ f(\gamma) = \delta \ \text{ et } \ f(\delta) = \alpha.$$

a. Déterminer l'image directe $f(A)$ de A par f.

b. Expliciter l'image réciproque $f^{-1}(A)$ de A par f.

c. Donner un sous-ensemble B de E possédant 2 éléments et tel que $f(B) = f(A)$ et $f^{-1}(B) = f^{-1}(A)$.

Exercice 2. On considère l'application :

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ x \to \frac{1}{\sin(x) + 2}.$$

a. Identifier l'image directe de $[0, 2\pi]$ par f, puis celle de $[0, \pi]$.

b. Déterminer l'ensemble des antécédents de $\frac{1}{2}$ par f.

c. Expliciter l'image réciproque de $[-7, \frac{2}{5}]$ par f.

Exercice 3. On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \to (t^2, t^4).$$

a. Calculer l'image de 2 par f. Est-ce que $(9, 3)$ possède un antécédent par f ?

b. Etant donné $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{(x, y)\})$. Combien possède-t-il d'éléments ?

c. Expliciter l'image directe de $\mathbb{R}$ par f.

d. Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(B)$ de l'ensemble $B = \{(x, 5x),\ x \in \mathbb{R}\}$ par l'application f.

Exercice 4. On note A le sous-ensemble $[-4, 0]$ de $\mathbb{R}$. On considère aussi l'application :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to x^2 + 6x + 7.$$

a. Identifier l'image directe de $\mathbb{R}$ par f.

b. Etant donné $y \in \mathbb{R}$, déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$. Combien y possède-t-il d'antécédents par f dans A ?

c. Expliciter les sous-ensembles $f(A)$ et $f^{-1}(f(A))$ de $\mathbb{R}$.

Exercice 5. On donne une application $f : E \to F$ entre deux ensembles. Soit B un sous-ensemble de F.

a. Montrer que l'inclusion $f(f^{-1}(B)) \subset B$ est toujours vérifiée.

b. Sur un exemple de votre choix, montrer que l'inclusion du a. peut être stricte.

c. Montrer qu'on a en fait $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.

Exercice 6. On donne une application $f : E \to F$ entre deux ensembles. Démontrer que :

$$\forall A \subset E, \forall B \subset F, \quad f(A) \cap B = \varnothing \ \Leftrightarrow\ A \cap f^{-1}(B) = \varnothing.$$

Indication : procéder par double implication et utiliser des raisonnements par contraposée.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. $\{\alpha, \gamma\}$, b. $\{\beta, \gamma, \delta\}$.
Ex. 2 : a. $[\frac{1}{3}, 1]$, $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, b. $\{0, \pi, 2\pi\}$, c. $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$.
Ex. 3 : a. $(4, 16)$, non, b. 2 si $x > 0$ et $y = x^2$, 1 si $x = y = 0$, 0 sinon, c. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0 \text{ et } y = x^2\}$, d. $\{-\sqrt{5}, 0, \sqrt{5}\}$.
Ex. 4 : a. $[-2, +\infty[$, c. $[-2, 7]$, $[-6, 0]$.