Série 3

Exercice 1. Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la valeur de l'entier proposé :

a. $5!$ b. $7!$ c. $\binom{5}{3}$ d. $\binom{11}{7}$.

Exercice 2. Déterminer le coefficient de x^9 dans le développement de :

a. $(x+1)^{12}$ b. $(2-x)^{12}$ c. $(x+x^3)^5$.

Exercice 3. On donne l'ensemble :

$$E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa\}.$$

a. Combien E contient-il de sous-ensembles $A \subset E$ possédant 4 éléments ?

b. Parmi ces sous-ensembles, combien vérifient de plus la condition $A \cap \{\beta, \delta\} = \varnothing$?

Exercice 4. On donne l'ensemble $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota\}$ et on s'intéresse aux sous-ensembles A de E tels que :

$$\mathrm{Card}(A) = 5 \quad \text{et} \quad \mathrm{Card}(A \cap \{\alpha, \gamma, \theta\}) = 1.$$

a. Si A vérifie les conditions données, que pouvez-vous dire du sous-ensemble $A \cap \{\beta, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \iota\}$?

b. Combien de sous-ensembles A de E vérifient les conditions données ?

Exercice 5. Déterminer la valeur de $n \in \mathbb{N}^*$ sachant que :

$$\sum_{k=1}^{3} \binom{3n}{k} = 115n\,.$$

Exercice 6. On donne un ensemble E fini de cardinal $n \geqslant 2$ ainsi qu'un entier k vérifiant :

$$1 \leqslant k \leqslant n-1\,.$$

On considère aussi un élément particulier α de E qui est fixé dans la suite de l'exercice.

a. Parmi les sous-ensembles à k éléments de E, combien ne contiennent pas α ? *Indication : penser à* $\complement_E(\{\alpha\})$.

b. De la même manière, parmi les sous-ensembles à k éléments de E, combien contiennent α ?

c. En déduire la formule suivante vue au cours :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Exercice 7. Dans cet exercice, on souhaite montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

a. Comment cette égalité se voit-elle sur le triangle de Pascal ? Contrôler qu'elle est vraie pour $n \leqslant 5$.

b. Etablir le résultat voulu en utilisant la formule du binôme de Newton.

c. Montrer la formule en comptant de deux manières différentes le nombre $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E))$, où E est un ensemble à n éléments.

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$$

et on souhaite montrer que $A_n = B_n = 2^{2n-1}$.

a. Comment ces égalités se voient-elles sur le triangle de Pascal ? Contrôler qu'elles sont vraies pour $n \leqslant 3$.

b. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $A_n - B_n = 0$. *Indication : développer* $(-1+1)^{2n}$.

c. En déduire le résultat voulu. *Indication : on pourra chercher à calculer* $A_n + B_n$.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. 120, b. 5040, c. 10, d. 330.
Ex. 2 : a. 220, b. −1760, c. 10.
Ex. 3 : a. 210, b. 70.
Ex. 4 : a. Il possède 4 éléments, b. 45.
Ex. 5 : $n = 5$