# Série 11

**Exercice 1.** Déterminer une forme réduite de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée.

a. $f : (x, y) \to (14x + 25y, -x + 4y)$ b. $f : (x, y) \to (2x + 5y, -2x)$ c. $f : (x, y) \to (30x + 901y, -x - 30y)$.

On ne demande pas d'effectuer la réduction explicitement.

**Exercice 2.** On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (7x + 5y, -5x - 3y).$$

a. Calculer le polynôme caractéristique de $f$ et en déduire les valeurs propres (éventuelles).
b. Donner une forme réduite de $f$.
c. Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle $f$ est représentée par cette forme réduite.

**Exercice 3.** On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (2x + 17y, -x + 4y).$$

a. Calculer le polynôme caractéristique de $f$. En déduire une forme réduite de $f$.
b. Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle $f$ est représentée par cette forme réduite.

**Exercice 4.** Déterminer un exemple d'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

qui n'est pas diagonalisable et telle que $f(1, 2) = (3, 6)$. *Indication : quelle est la forme réduite de $f$ ?*

**Exercice 5.** En discutant selon la valeur des réels $\alpha, \beta, \gamma$, déterminer une forme réduite de l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (\alpha x + \beta y, \gamma x + \alpha y).$$

On ne demande pas de produire une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle $f$ est représentée par cette forme réduite.

**Exercice 6.** Donner un contre-exemple à chacun des énoncés suivants. Pour toutes matrices $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ ...

a. ... si $A$ et $B$ sont diagonalisables alors $AB$ l'est aussi.
b. ... si $AB$ est diagonalisable alors $A$ ou $B$ l'est aussi.
c. ... si $A$ et $B$ sont diagonalisables alors $A + B$ l'est aussi.

*Indication : commencer par écrire une liste de matrices diagonalisables et une liste de matrices non-diagonalisables.*

**Exercice 7.** Etant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère les applications linéaires $f$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ suivantes :

$$f : (x, y) \to ((5-5\alpha)x + (3-5\alpha)y, (4\alpha-3)x + (3\alpha-1)y) \quad \text{et} \quad g : (x, y) \to ((2-3\alpha)x + \alpha y, -5\alpha x + (2+\alpha)y).$$

Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha$ ces applications ont-elles la même forme réduite ? Justifier votre réponse.

---

*Éléments de réponse :*

**Ex. 1 :** a. $\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, b. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, c. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
**Ex. 2 :** a. 2, b. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
**Ex. 3 :** a. $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.
**Ex. 7 :** $\alpha = 1$.