Série 10

Exercice 1. Pour chacune des affirmations suivantes, dire en justifiant si elle est vraie ou fausse, sachant que :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (x + y, 2x).$$

a. 0 est valeur propre de f

b. $(1, 1)$ est vecteur propre de f

c. f est diagonalisable.

Exercice 2. L'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

a. $f : (x, y) \to (-3x, 2y)$

b. $f : (x, y) \to (3x - y, x + 5y)$

c. $f : (x, y) \to (2x - y, 5x - 2y)$.

On ne demande pas de déterminer une base propre.

Exercice 3. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (3x - 2y, -x + 2y).$$

a. Calculer le polynôme caractéristique de f et en déduire ses valeurs propres.

b. f est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une base propre pour f.

c. Représenter sur un croquis les sous-espaces propres de f ainsi qu'un point (x, y) et son image $f(x, y)$ par f.

Exercice 4. En discutant selon la valeur du réel α, dire si l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to ((1 + \alpha)x + \alpha y, -\alpha x + (1 - \alpha)y)$$

est diagonalisable. Justifier votre réponse.

Exercice 5. En discutant selon la valeur des réels α et β, déterminer si l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (\alpha y, \beta x)$$

est diagonalisable et, le cas échéant, donner une base propre pour f.

Exercice 6. On donne une application linéaire dont la matrice est *symétrique* :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (\alpha x + \beta y, \beta x + \gamma y).$$

a. Montrer que f est diagonalisable.

b. On suppose que $f \neq \alpha\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Montrer que si l'on visualise $\mathbb{R}^2$ à l'aide d'un repère orthonormé du plan alors f possède comme sous-espaces propres 2 droites vectorielles orthogonales. *Indication : discuter selon que* $\beta = 0$ *ou* $\beta \neq 0$.

Exercice 7. On donne une matrice $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer l'égalité suivante :

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0.$$

Ce résultat porte le nom de *théorème de Cayley-Hamilton*.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. faux, b. vrai, c. vrai.
Ex. 2 : a. diagonalisable, b. et c. non diagonalisable.
Ex. 3 : a. $(X-1)(X-4)$, b. oui.
Ex. 4 : diagonalisable si et seulement si $\alpha = 0$.
Ex. 5 : diagonalisable si et seulement si $\alpha\beta > 0$ ou $\alpha = \beta = 0$.