Série 6

Exercice 1. Dans chacun des cas, déterminer l'image directe de l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée. f est-elle surjective ?

a. $x \to -x$ b. $x \to \cos(x) + 1$ c. $x \to 2x - |x|$.

Solution:

a. Par l'application f, tout $y \in \mathbb{R}$ possède un unique antécédent, à savoir $x = -y$. Par conséquent, on a $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et l'application est surjective (et même bijective).

b. Lorsque x varie dans $\mathbb{R}$, le réel $\cos(x)$ prend toutes les valeurs entre -1 et 1. Par conséquent, on voit que $f(x)$ prend toutes les valeurs entre 0 et 2. En résumé :

$$f(\mathbb{R}) = [0, 2].$$

L'application f n'est donc pas surjective.

c. En discutant selon le signe de $x \in \mathbb{R}$, on constate que :

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ 3x \text{ si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Par conséquent, tout $y \in \mathbb{R}$ possède un unique antécédent par f, à savoir $x = y$ si $y \geqslant 0$ et $x = \frac{y}{3}$ si $y \leqslant 0$. L'application f est donc une bijection (et est en particulier surjective).

Exercice 2. On considère l'application :

$$f :]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \to \frac{x^2}{x+1}.$$

a. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$. Combien possède-t-il d'éléments ?

b. Identifier l'image directe de f. L'application f est-elle surjective ?

c. Montrer que f induit une bijection de $[0, +\infty[$ sur lui-même et donner la bijection réciproque.

Solution:

a. Soit $y \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$, on a alors :

$$x \in f^{-1}(\{y\}) \Leftrightarrow f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} = y \Leftrightarrow x^2 - yx - y = 0.$$

Les antécédents de y s'interprètent donc comme les solutions dans l'ensemble $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$ de l'équation de degré 2 en x que l'on vient d'obtenir. Remarquons alors que $x = -1$ n'est jamais solution de cette équation (car $(-1)^2 - y(-1) - y = 1 \neq 0$), si bien que l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est simplement l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$. Calculons le discriminant :

$$(-y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-y) = y^2 + 4y = y(y+4).$$

Ce discriminant est donc nul pour $y \in \{0, -4\}$, strictement négatif pour $y \in]-4, 0[$ et strictement positif autrement. En appliquant les formules de Viète on trouve alors :

$$f^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} \varnothing \text{ si } y \in]-4, 0[\\ \{\frac{y}{2}\} \text{ si } \in \{0, -4\} \\ \{\frac{y - \sqrt{y^2+4y}}{2}, \frac{y + \sqrt{y^2+4y}}{2}\} \text{ si } y \in]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[. \end{cases}$$

Le réel y possède $0, 1$ ou 2 antécédent(s) selon le cas dans lequel on se trouve.

b. L'image directe de f est formée des $y \in \mathbb{R}$ qui possède au moins un antécédent par f. D'après le travail effectué au a., on voit donc que :

$$f(\mathbb{R}) =]-\infty, -4] \cup [0, +\infty[.$$

Comme cette image n'est pas $\mathbb{R}$ tout entier, on peut conclure que f n'est pas surjective.

c. Commençons par remarquer que $f(x)$ est positif si x est positif, si bien que f induit bien une application de $[0,+\infty[$ dans lui-même. Donnons-nous alors un $y \in [0,+\infty[$ et recherchons ses antécédents par f qui se trouvent dans l'intervalle $[0,+\infty[$. Pour cela, on utilise à nouveau le travail effectué au a. Si $y=0$, on voit que l'unique antécédent de y par f (à savoir 0) se trouve dans $[0,+\infty[$. Si $y>0$, observons que :

$$\tfrac{y+\sqrt{y^2+4y}}{2} > 0 \quad \text{et} \quad \tfrac{y-\sqrt{y^2+4y}}{2} < 0 \quad (\text{car } \sqrt{y^2+4y} > \sqrt{y^2} = y),$$

si bien que y possède aussi un unique antécédent par f dans $[0,+\infty[$. En définitive, on a bien montré que f induit une bijection de $[0,+\infty[$ sur lui-même et on a même calculé la bijection réciproque :

$$[0,+\infty[\to [0,+\infty[,\ y \to \tfrac{y+\sqrt{y^2+4y}}{2}$$

(remarquer que cette formule donne bien 0 pour $y=0$).

Exercice 3. On donne $E=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$ et l'application $f : E \to E$ définie par :

$$f(\alpha)=\varepsilon,\ f(\beta)=\delta,\ f(\gamma)=\alpha,\ f(\delta)=\varepsilon \text{ et } f(\varepsilon)=\beta.$$

a. L'application f est-elle surjective ?

b. Déterminer un sous-ensemble A de E tel que f induit une bijection de A sur $f(E)$.

c. Trouver un sous-ensemble non vide B de E tel que f induit une bijection de B sur B.

Solution:

a. On a :

$$f(E)=\{f(\alpha),f(\beta),f(\delta),f(\delta),f(\varepsilon)\}=\{\alpha,\beta,\delta,\varepsilon\}.$$

L'élément γ n'est donc pas "atteint" par f, ce qui empêche f d'être surjective.

b. Un sous-ensemble A de E est tel que f induit une bijection de A sur $f(E)$ si et seulement s'il contient pour chacun des 4 éléments de $f(E)$ un antécédent de celui-ci par f. On voit donc qu'il y a deux manières de s'y prendre pour créer un tel sous-ensemble A :

$$A=\{\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon\} \quad \text{ou} \quad A=\{\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}.$$

c. On trouve que le sous-ensemble $B=\{\beta,\delta,\varepsilon\}$ fonctionne. En effet, on a :

$$f(\beta)=\delta,\ f(\delta)=\varepsilon,\ f(\varepsilon)=\beta,$$

si bien que chaque élément de B possède un et un seul antécédent par f dans B.

Exercice 4. On considère l'application suivante $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et le sous-ensemble suivant A de $\mathbb{R}^2$:

$$f:(x,y)\to(x+y,xy) \quad \text{et} \quad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\geqslant y\}.$$

a. Calculer l'image de $(1,2)$ et l'ensemble des antécédents de $(2,-3)$ par f.

b. Déterminer l'ensemble des antécédents de $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ par f.

c. Montrer que $f(\mathbb{R}^2)=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ u^2\geqslant 4v\}$.

d. Montrer que f induit une bijection de A sur $f(\mathbb{R}^2)$ et décrire la bijection réciproque.

Solution:

a. Par définition de f, on trouve :

$$f(1,2)=(1+2,1\cdot 2)=(3,2).$$

Par ailleurs, (x,y) est un antécédent de $(2,-3)$ si et seulement si :

$$f(x,y)=(2,-3) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-x \\ x(2-x)=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-x \\ x^2-2x-3=0. \end{cases}$$

La résolution de cette équation de degré 2 montre qu'il y a deux valeurs possibles pour x : -1 (qui correspond à $y=3$) et 3 (qui correspond à $y=-1$). On en déduit :

$$f^{-1}(\{(2,-3)\})=\{(-1,3),(3,-1)\}.$$

b. On procède comme en a., mais avec (u,v) à la place de $(2,-3)$. On obtient :

$$f(x,y)=(u,v) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=u \\ xy=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=u-x \\ x(u-x)=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=u-x \\ x^2-ux+v=0. \end{cases}$$

On organise alors la discussion selon le discriminant $\Delta = u^2-4v$ de l'équation du second degré apparue dans le dernier système. On trouve :

$$f^{-1}(\{(u,v)\}) = \begin{cases} \varnothing \text{ si } u^2<4v \\ \{(\frac{u}{2},\frac{u}{2})\} \text{ si } u^2=4v \\ \{(\frac{u+\sqrt{u^2-4v}}{2},\frac{u-\sqrt{u^2-4v}}{2}),(\frac{u-\sqrt{u^2-4v}}{2},\frac{u+\sqrt{u^2-4v}}{2})\} \text{ si } u^2>4v. \end{cases}$$

c. L'image de f est constituée des $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ qui possèdent au moins un antécédent par f. D'après les calculs effectués en b., on voit donc directement que :

$$f(\mathbb{R}^2)=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ u^2\geqslant 4v\}.$$

d. Il s'agit de montrer que tout élément (u,v) de $f(\mathbb{R}^2)$ (c'est-à-dire vérifiant $u^2\geqslant 4v$) possède un unique antécédent dans A et de calculer cet antécédent. Or, les calculs effectués au b. permettent d'écrire, pour un tel (u,v) :

$$f^{-1}(\{(u,v)\}) = \begin{cases} \{(\frac{u}{2},\frac{u}{2})\} \text{ si } u^2=4v \\ \{(\frac{u+\sqrt{u^2-4v}}{2},\frac{u-\sqrt{u^2-4v}}{2}),(\frac{u-\sqrt{u^2-4v}}{2},\frac{u+\sqrt{u^2-4v}}{2})\} \text{ si } u^2>4v. \end{cases}$$

En intersectant avec l'ensemble A on trouve alors :

$$A\cap f^{-1}(\{(u,v)\}) = \begin{cases} \{(\frac{u}{2},\frac{u}{2})\} \text{ si } u^2=4v \\ \{(\frac{u+\sqrt{u^2-4v}}{2},\frac{u-\sqrt{u^2-4v}}{2})\} \text{ si } u^2>4v. \end{cases}$$

L'élément (u,v) de $f(\mathbb{R}^2)$ possède donc un unique antécédent par f dans A : f induit donc bien une bijection de A sur $f(\mathbb{R}^2)$. La bijection réciproque est l'application qui associe à (u,v) son antécédent, à savoir :

$$\underbrace{\{(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ u^2\geqslant 4v\}}_{f(\mathbb{R}^2)} \to A,\ (u,v)\to(\tfrac{u+\sqrt{u^2-4v}}{2},\tfrac{u-\sqrt{u^2-4v}}{2})$$

(remarquer que cette formule renvoie bien $(\frac{u}{2},\frac{u}{2})$ si $u^2=4v$).

Exercice 5. On considère l'application :

$$f:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{N},\ (n,p)\to|2n+3p|\,.$$

a. Calculer $f(-1,1)$. En déduire un antécédent de 2 par f.
b. Montrer que f est surjective. *Indication : utiliser les calculs effectués au a.*
c. f restreinte à $\mathbb{N}^2$ est-elle surjective ? Expliciter son image $f(\mathbb{N}^2)$.

Solution:

a. On trouve $f(-1,1)=|2\cdot(-1)+3\cdot 1|=1$. En multipliant cette égalité par 2, on trouve $|2\cdot(-2)+3\cdot 2|=2$, ce qui montre que $f(-2,2)=2$. Autrement dit, $(-2,2)$ est un antécédent de 2 par f.

b. Il s'agit de montrer que $f(\mathbb{Z}^2)=\mathbb{N}$, autrement dit, que tout $k\in\mathbb{N}$ est "produit" par l'application. Or, en multipliant par k l'égalité écrite en a., on trouve que :

$$f(-k,k)=|-2k+3k|=k.$$

Par conséquent, tout $k\in\mathbb{N}$ possède au moins un antécédent par f : l'application f est surjective.

c. Listons quelques valeurs atteintes par f sur $\mathbb{N}^2$. On trouve par exemple :

$$f(0,0)=0,\ f(1,0)=2,\ f(0,1)=3,\ f(2,0)=4,\ f(1,1)=5,\ f(0,2)=6,\ldots$$

Il semble que tout entier naturel apparait dans cette liste, sauf 1. Autrement dit, on conjecture que :

$$f(\mathbb{N}^2)=\complement_{\mathbb{N}}(\{1\}).$$

Montrons cela formellement. Tout d'abord, lorsque (n,p) appartient à $\mathbb{N}^2$, on a simplement :

$$f(n,p)=2n+3p.$$

En prenant n entier naturel quelconque et $p = 0$ on obtient $f(n,p) = 2n$: on produit de cette façon tous les entiers naturels pairs. En prenant maintenant n entier naturel quelconque et $p = 1$ on obtient $f(n,p) = 2n+3$: on produit de cette façon tous les entiers naturels impairs à partir de 3. Pour achever de montrer notre conjecture, il reste à voir que 1 n'est pas atteint. Or, pour un couple $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ on a :

$$n \geqslant 1 \Rightarrow f(n,p) \geqslant 2n \geqslant 2 \quad \text{et} \quad p \geqslant 1 \Rightarrow f(n,p) \geqslant 3p \geqslant 3.$$

Comme $f(0,0) = 0$, on voit donc que 1 ne peut être obtenu comme l'image d'un couple $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ (bien qu'il puisse l'être pour un couple $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$ comme vu en a.). L'application f restreinte à $\mathbb{N}^2$ n'est donc pas surjective, car 1 n'a pas d'antécédent.

Exercice 6. Vrai ou faux ? Justifier. Pour tout choix d'applications f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

a. si f et g sont surjectives, alors l'application $fg : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)g(x)$ est surjective.

b. si l'application $f+g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)+g(x)$ est surjective, alors f ou g est surjective.

c. si f et g sont surjectives, alors l'application $(f,g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (f(x), g(y))$ est surjective.

Solution:

a. C'est faux. Considérons pour f et g l'application identité $x \to x$. L'application "produit" est alors $fg : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$ et n'est donc pas surjective (elle n'atteint pas les valeurs strictement négatives). On a donc trouvé un contre-exemple à l'implication proposée.

b. C'est faux. Considérons pour f l'application $x \to x^2$ et pour g l'application $x \to -x^2 + x$. L'application "somme" est alors $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x$ et est donc surjective. Par contre, ni f ni g n'est surjective (f ne prend que des valeurs positives ou nulles et g n'atteint aucune valeur strictement supérieure à $\frac{1}{4}$.

c. C'est vrai. En effet, donnons-nous un $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ et montrons qu'il possède au moins un antécédent par l'application (f,g). Comme f est surjective, il existe un réel x tel que $u = f(x)$. De même, il existe un réel y tel que $v = g(y)$. L'application (f,g) envoie alors (x,y) sur $(f(x), g(y))$, c'est-à-dire sur (u,v). Autrement dit, (u,v) possède bien un antécédent.