Série 5

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective. Justifier.

a. $x \to 2x + 1$ b. $x \to 2\cos(x) - \sin(2x)$ c. $x \to x^3$.

Solution:

a. L'application f est injective. En effet, si on considère deux réels x et x' ayant même image par f, alors :

$$2x + 1 = 2x' + 1 \text{ et donc } x = x'.$$

b. L'application f est 2π-périodique, au sens où elle prend la même valeur en x et en $x + 2\pi$. Une telle application ne peut être injective, puisqu'on a par exemple :

$$f(0) = f(2\pi) = 2,\ f(1) = f(1 - 2\pi),\ \ldots$$

c. Donnons-nous deux réels x et x'. On a alors :

$$x^3 = (x')^3 \Leftrightarrow (x - x')(\underbrace{x^2 + xx' + (x')^2}_{(x+\frac{1}{2}x')^2+\frac{3}{4}(x')^2}) = 0 \Leftrightarrow (x = x' \text{ ou } (x + \tfrac{1}{2}x')^2 + \tfrac{3}{4}(x')^2 = 0) \Leftrightarrow (x = x' \text{ ou } x = x' = 0) \Leftrightarrow x = x'.$$

Ceci montre que f est injective.

Exercice 2. On donne $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ et $F = \{\varepsilon, \zeta, \eta\}$, ainsi que les applications $f : E \to F$ et $g : F \to E$ définies par :

$$f(\alpha) = \eta,\ f(\beta) = f(\gamma) = \varepsilon,\ f(\delta) = \zeta \text{ et } g(\varepsilon) = \delta,\ g(\zeta) = \beta,\ g(\eta) = \alpha.$$

a. Déterminer l'application $f \circ g$. Est-elle injective ?

b. Même question avec l'application $g \circ f$.

c. Lister tous les sous-ensembles non vides A de E tels que la restriction de f à A est injective. Combien y en a-t-il ?

Solution:

a. L'application $f \circ g$ a F pour ensemble de départ et pour ensemble d'arrivée. Calculons alors les images des 3 éléments de F :

$$(f \circ g)(\varepsilon) = f(g(\varepsilon)) = f(\delta) = \zeta,\ (f \circ g)(\zeta) = f(g(\zeta)) = f(\beta) = \varepsilon,\ (f \circ g)(\eta) = f(g(\eta)) = f(\alpha) = \eta.$$

On voit donc que $f \circ g$ est injective, puisqu'aucun élément de F ne possède 2 antécédents ou plus par cette application.

b. L'application $g \circ f$ a E pour ensemble de départ et pour ensemble d'arrivée. Calculons alors les images des 4 éléments de E :

$$(g\circ f)(\alpha) = g(f(\alpha)) = g(\eta) = \alpha,\ (g\circ f)(\beta) = g(f(\beta)) = g(\varepsilon) = \delta,\ (g\circ f)(\gamma) = g(f(\gamma)) = g(\varepsilon) = \delta,\ (g\circ f)(\delta) = g(f(\delta)) = g(\zeta) = \beta.$$

On voit donc que $g\circ f$ n'est pas injective, puisqu'il est possible d'obtenir la même valeur à l'arrivée pour deux valeurs distinctes au départ : par exemple, δ est à la fois l'image de β et celle de γ par $g \circ f$

c. Le seul "doublon" associé à f étant :

$$f(\beta) = f(\gamma) = \varepsilon$$

on voit que la restriction de f à A est injective si et seulement si β et γ n'y figurent pas simultanément. On trouve 11 possibilités :

$$\{\alpha\},\ \{\beta\},\ \{\gamma\},\ \{\delta\},\ \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\},\ \{\alpha, \delta\}, \{\beta, \delta\},\ \{\gamma, \delta\}\ \{\alpha, \beta, \delta\},\ \{\alpha, \gamma, \delta\}.$$

Exercice 3. On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ x \to (\frac{x}{2 + x^2}, x^2 - 3x).$$

a. Déterminer le (ou les) antécédent(s) éventuel(s) de $(\frac{1}{3}, -2)$ par f. L'application f est-elle injective ?

b. Montrer que f restreinte à $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ est injective.

Solution:

a. L'ensemble recherché est formé des $x \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\underbrace{\frac{x}{2+x^2} = \frac{1}{3}}_{\Leftrightarrow x^2-3x+2=0} \text{ et } \underbrace{x^2 - 3x = -2}_{\Leftrightarrow x^2-3x+2=0}.$$

Autrement dit, il s'agit de l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$. La résolution de cette équation montre alors que $(\frac{1}{3}, -2)$ possède deux antécédents par f, à savoir 1 et 2 :

$$f^{-1}(\{(\tfrac{1}{3}, -2)\}) = \{1, 2\}.$$

Par conséquent, l'application f n'est pas injective (par une application injective, un élément à l'arrivée possède au plus un antécédent).

b. Soient x et x' deux réels distincts. Etudions à quelle condition ces deux éléments ont la même image par f :

$$f(x') = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x'}{2+(x')^2} = \frac{x}{2+x^2} \\ (x')^2 - 3x' = x^2 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x'-x)(2-xx') = 0 \\ (x'-x)(x+x'-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - xx' = 0 \\ x + x' - 3 = 0 \end{cases}$$

La dernière condition est équivalente à demander que x et x' soient solutions de l'équation du second degré :

$$\underbrace{t^2 - 3t + 2}_{(t-x)(t-x')} = 0 = (t-1)(t-2).$$

Par conséquent, la seule possibilité pour la paire $\{x, x'\}$ est d'être égale à $\{1, 2\}$ (c'est le cas identifié en a.). On voit donc qu'il est impossible de trouver deux réels distincts et différents de 1 qui ont la même image par f : la restriction de f à $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ est donc bien injective.

Exercice 4. On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to -x^2 - 4x - 7.$$

a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{f(x)\})$. L'application f est-elle injective ? Et qu'en est-il de $f \circ f$?

b. Identifier l'image directe de $\mathbb{R}$ par f. La restriction de f à $f(\mathbb{R})$ est-elle injective ?

c. Soit $z \in \mathbb{R}$. Montrer que f restreinte à $]-\infty, z[$ est injective si et seulement si $z \leqslant -2$.

Solution:

a. Etant donné $x' \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = f(x') \Leftrightarrow -x^2 - 4x - 7 = -(x')^2 - 4x' - 7 \Leftrightarrow (x - x')(x + x' + 4) = 0 \Leftrightarrow (x = x' \text{ ou } x' = -4 - x).$$

On en déduit que :

$$f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x, -4 - x\}.$$

Cet ensemble possède 2 éléments si $x \neq -2$ et 1 seul élément si $x = -2$. On en déduit que f n'est pas injective car il y a de nombreux "doublons", comme par exemple :

$$f(0) = f(-4),\ f(1) = f(-5),\ f(\pi) = f(-4 - \pi),\ ....$$

En appliquant f aux égalités ci-dessus, on trouve des "doublons" pour $f \circ f$:

$$(f \circ f)(0) = f(f(0)) = f(f(-4)) = (f \circ f)(-4),\ (f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(f(-5)) = (f \circ f)(-5),\ ...$$

Par conséquent, l'application $f \circ f$ n'est pas injective (remarquons que, pour obtenir cette conclusion, nous n'avons même pas eu à calculer la formule pour $f \circ f$).

b. Par l'étude générale du trinôme du second degré, on sait que l'application f prend toute les valeurs inférieures ou égales à son maximum -3 (obtenu pour $x = -2$). Autrement dit, $f(\mathbb{R}) =]-\infty, -3]$. Montrons maintenant que la restriction de f à $]-\infty, -3]$ est injective. Pour cela, il suffit de constater que si x est inférieur ou égal à -3, alors l'autre antécédent de $f(x)$ par f, à savoir $-4 - x$ est supérieur à -1 et donc en dehors de $]-\infty, -3]$. En résumé, on a montré que, si $x \leqslant -3$, alors x est l'unique antécédent de $f(x)$ par f qui se trouve dans l'intervalle $]-\infty, -3]$:

$$\forall x \in]-\infty, -3], \quad \mathrm{Card}(f^{-1}(\{f(x)\}) \cap]-\infty, -3]) = 1.$$

Ceci prouve bien que f restreinte à $]-\infty, -3]$ est injective.

c. Si $z > -2$, alors on peut trouver dans l'intervalle ouvert $]-\infty, z[$ deux réels "symétriques par rapport à -2", c'est-à-dire du type $-2+\varepsilon$ et $-2-\varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$ (éventuellement très petit !). D'après le a., on sait alors que ces deux réels ont la même image par f :

$$f(-2-\varepsilon) = f(\underbrace{-2+\varepsilon}_{-4-(-2-\varepsilon)}).$$

On peut donc trouver dans $]-\infty, z[$ deux réels distincts qui ont la même image par f : la restriction de f à $]-\infty, z[$ n'est pas injective. Supposons à présent que $z \leqslant -2$. Le même raisonnement qu'en b. montre alors que f restreinte à $]-\infty, z[$ est injective. En effet, si x est strictement inférieur à z, alors l'autre antécédent de $f(x)$ par f, à savoir $-4-x$ est strictement supérieur à $-4-z$ et donc à z (car $z \leqslant -2$, donc $-4-z \geqslant z$). Cela montre que x est l'unique antécédent de $f(x)$ par f qui se trouve dans l'intervalle $]-\infty, z[$:

$$\forall x \in]-\infty, z[, \quad \mathrm{Card}(f^{-1}(\{f(x)\}) \cap]-\infty, z[) = 1.$$

Ceci prouve bien que f restreinte à $]-\infty, z[$ est injective.

Exercice 5. On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to x^3 - 3x.$$

a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{f(x)\})$. L'application f est-elle injective ?

b. Montrer que, si $x > 1$, alors $f(x)$ possède un unique antécédent par f dans $]1, +\infty[$.

c. L'application f restreinte à $[1, +\infty[$ est-elle injective ? Justifier.

Solution:

a. L'ensemble $f^{-1}(\{f(x)\})$ est l'ensemble des solutions de l'équation (en x') :

$$f(x') = f(x) \Leftrightarrow (x')^3 - 3x' = x^3 - 3x \Leftrightarrow (x'-x)((x')^2 + xx' + x^2 - 3) = 0.$$

Par conséquent, on peut écrire :

$$f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\} \cup \{\text{ solution(s) de } (x')^2 + xx' + x^2 - 3 = 0\}.$$

Le discriminant de l'équation du second degré (en x') qui est apparue dans la factorisation vaut :

$$\Delta = x^2 - 4(x^2-3) = 3(4-x^2).$$

On obtient alors :

$$f^{-1}(\{f(x)\}) = \begin{cases} \{x\} \text{ si } x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\\ \{x, -\frac{x}{2}\} \text{ si } x = \pm 2 \\ \{x, \frac{-x+\sqrt{3(4-x^2)}}{2}, \frac{-x-\sqrt{3(4-x^2)}}{2}\} \text{ si } x \in]-2, 2[. \end{cases}$$

L'application f n'est donc pas injective. Par exemple, $f(2) = 2$ possède deux antécédents : 2 et -1.

Remarque : dans le cas où $x \in]-2, 2[$, il se peut que l'une des racines obtenues par l'équation du second degré soit égale à x (ceci se produit pour $x = \pm 1$). Dans ce cas, $f(x)$ possède deux antécédents par f et non trois, comme la notation pourrait le suggérer.

b. Supposons que $x \in]1, +\infty[$. Utilisons alors le résultat obtenu en a. Si $x > 2$, alors $f(x)$ possède un unique antécédent par f dans $\mathbb{R}$, à savoir x, qui appartient bien à $]1, +\infty[$. Si $x = 2$, alors $f(2) = 2$ possède deux antécédents par f dans $\mathbb{R}$, à savoir 2 et -1. Il possède donc bien un seul antécédent dans l'intervalle $]1, +\infty[$ (à savoir 2 lui même). Supposons à présent que $x < 2$ (toujours sous la condition $x > 1$ imposée par l'énoncé). Dans ce cas, il s'agit de voir que, dans la liste des antécédents par f de $f(x)$ trouvée en a. :

$$x, \frac{-x+\sqrt{3(4-x^2)}}{2}, \frac{-x-\sqrt{3(4-x^2)}}{2},$$

un seul (à savoir x) se trouve dans l'intervalle $]1, +\infty[$. Remarquons tout de suite que le dernier réel dans cette liste est négatif. Par ailleurs :

$$1 < x < 2 \Rightarrow 0 < 4 - x^2 < 3 \Rightarrow \frac{-x+\sqrt{3(4-x^2)}}{2} < 1.$$

On a donc bien montré le résultat voulu.

c. Le résultat établi en b. montre que f est injective sur l'intervalle $]1, +\infty[$. Pour conclure qu'elle est injective sur $[1, +\infty[$, il reste à voir que la valeur $f(1) = -2$ n'est atteinte par f qu'une seule fois sur cet intervalle. Or c'est bien le cas, puisque d'après le résultat trouvé en a., les seuls antécédents de $f(1)$ dans $\mathbb{R}$ sont 1 lui-même et -2 (qui n'appartient pas à $[1, +\infty[$).

Exercice 6. Soient E et F deux ensembles. Montrer qu'une application $f : E \to F$ est injective si et seulement si :

$$\forall A \subset E, \quad f(\complement_E(A)) \subset \complement_F(f(A)).$$

Indication : raisonner par double implication et pour "$\Leftarrow$", utiliser le cas particulier $A = \{x\}$.

Solution: Raisonnons par double implication. Commençons par " $\Rightarrow$ " : supposons donc que f est injective et montrons la propriété donnée dans l'énoncé. Pour cela, donnons-nous un sous-ensemble A de E et montrons que :

$$f(\complement_E(A)) \subset \complement_F(f(A)).$$

Observons que $f(\complement_E(A)) \cap f(A)$ est formé des éléments de F possédant par f un antécédent dans A et un antécédent en dehors de A. Comme f est injective (ce qui signifie que tout élément de F possède **au plus** un antécédent) on voit que cet ensemble est vide, si bien que $f(\complement_E(A))$ est entièrement contenu dans $\complement_F(f(A))$.

Supposons maintenant que f possède la propriété décrite dans l'énoncé, et cherchons à montrer que f est injective. Donnons-nous pour cela deux éléments distincts x et x' de E, et considérons le sous-ensemble $A = \{x\}$ de E. L'élément x' appartient à $\complement_E(A)$, si bien que $f(x')$ est élément de $f(\complement_E(A))$. D'après la propriété vérifiée par f, on voit donc que $f(x')$ appartient à $\complement_F(f(A)) = \complement_F(\{f(x)\})$. Autrement dit, $f(x)$ est distinct de $f(x')$. On a donc prouvé que f envoie deux éléments distincts de E sur deux éléments distincts de F : c'est donc une application injective.