Série 4

Exercice 1. On donne $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ et $A = \{\alpha, \beta, \delta\}$, ainsi que l'application $f : E \to E$ définie par :

$$f(\alpha) = \gamma,\ f(\beta) = \alpha,\ f(\gamma) = \delta \text{ et } f(\delta) = \alpha.$$

a. Déterminer l'image directe $f(A)$ de A par f.
b. Expliciter l'image réciproque $f^{-1}(A)$ de A par f.
c. Donner un sous-ensemble B de E possédant 2 éléments et tel que $f(B) = f(A)$ et $f^{-1}(B) = f^{-1}(A)$.

Solution:

a. Par définition de l'image directe, on a :
$$f(A) = \{f(\alpha), f(\beta), f(\delta)\} = \{\alpha, \gamma\}.$$
b. L'image réciproque $f^{-1}(A)$ de A par f est le sous-ensemble formé des éléments de E dont l'image par f appartient à $A = \{\alpha, \beta, \delta\}$. En inspectant les 4 éléments de E, on trouve alors que :
$$f^{-1}(A) = \{\beta, \gamma, \delta\}.$$
On peut aussi voir le sous-ensemble $f^{-1}(A)$ comme obtenu en collectant ensemble les antécédents de α (à savoir β et δ), ceux de β (qui n'en a pas) et de δ (à savoir γ).
c. On trouve que $B = \{\alpha, \delta\}$ convient. En effet, on a :
$$f(B) = \{f(\alpha), f(\delta)\} = \{\alpha, \gamma\} = f(A) \quad \text{et} \quad f^{-1}(B) = f^{-1}(\{\alpha\}) \cup f^{-1}(\{\delta\}) = \{\beta, \gamma, \delta\} = f^{-1}(A).$$

Exercice 2. On considère l'application :
$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ x \to \frac{1}{\sin(x) + 2}.$$
a. Identifier l'image directe de $[0, 2\pi]$ par f, puis celle de $[0, \pi]$.
b. Déterminer l'ensemble des antécédents de $\frac{1}{2}$ par f.
c. Expliciter l'image réciproque de $[-7, \frac{2}{5}]$ par f.

Solution:

a. Suivons l'évolution de $f(x)$ lorsque x varie de 0 à 2π. Tout d'abord, pour x allant de 0 à $\frac{\pi}{2}$, on sait que $\sin(x)$ va croitre de 0 à 1, si bien que $f(x)$ va décroitre de $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{3}$. Ensuite, pour x allant de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{2}$, on sait que $\sin(x)$ va décroitre de 1 à -1, si bien que $f(x)$ va croitre de $\frac{1}{3}$ à 1. Enfin, pour x allant de $\frac{3\pi}{2}$ à 2π, on sait que $\sin(x)$ va croitre de -1 à 0, si bien que $f(x)$ va décroitre de 1 à $\frac{1}{2}$. Quand on fait le bilan des valeurs prises par $f(x)$, on trouve donc que :
$$f([0, 2\pi]) = [\tfrac{1}{3}, 1].$$
En raisonnant de la même manière, on trouve que pour x allant de 0 à π, le réel $f(x)$ prend toutes les valeurs entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$. Autrement dit :
$$f([0, \pi]) = [\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}].$$
b. Il s'agit de déterminer tous les réels $x \in [0, 2\pi]$ qui vérifient :
$$f(x) = \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin(x) + 2} = \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x) + 2 = 2 \Leftrightarrow \sin(x) = 0.$$
On voit alors qu'il y a 3 antécédents à $\frac{1}{2}$ par f, à savoir $0, \pi$ et 2π. Autrement dit :
$$f^{-1}(\{\tfrac{1}{2}\}) = \{0, \pi, 2\pi\}.$$

c. Il s'agit de trouver tous les réels $x \in [0, 2\pi]$ tels que :

$$f(x) \in [-7, \tfrac{2}{5}].$$

On a vu en a. que $f(x)$ est toujours dans l'intervalle $[\frac{1}{3}, 1]$, ce qui permet d'écrire :

$$f(x) \in [-7, \tfrac{2}{5}] \Leftrightarrow f(x) \in [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{5}] \Leftrightarrow \tfrac{1}{3} \leqslant \frac{1}{\sin(x)+2} \leqslant \tfrac{2}{5} \Leftrightarrow \tfrac{5}{2} \leqslant \sin(x)+2 \leqslant 3 \Leftrightarrow \tfrac{1}{2} \leqslant \sin(x) \leqslant 1.$$

En définitive, on obtient donc :

$$f^{-1}([-7, \tfrac{2}{5}]) = [\tfrac{\pi}{6}, \tfrac{5\pi}{6}].$$

Exercice 3. On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \to (t^2, t^4).$$

a. Calculer l'image de 2 par f. Est-ce que $(9, 3)$ possède un antécédent par f ?

b. Etant donné $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{(x, y)\})$. Combien possède-t-il d'éléments ?

c. Expliciter l'image directe de $\mathbb{R}$ par f.

d. Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(B)$ de l'ensemble $B = \{(x, 5x),\ x \in \mathbb{R}\}$ par l'application f.

Solution:

a. On trouve $f(2) = (2^2, 2^4) = (4, 16)$. Le couple $(9, 3)$ n'a pas d'antécédent par f. En effet, il est impossible de trouver un réel t tel que $t^2 = 9$ et $t^4 = 3$, car on aurait alors $3 = t^4 = (t^2)^2 = 9^2 = 81$.

b. L'ensemble $f^{-1}(\{(x, y)\})$ est l'ensemble des réels t tels que :

$$(t^2, t^4) = (x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = x \\ t^4 = y. \end{cases}$$

Pour que ce système d'équations (en t) ait (au moins) une solution, il faut que $x \geqslant 0$ et $y = x^2$. Si l'une de ces conditions n'est pas remplie, on sait donc d'ores et déjà que le couple (x, y) n'a aucun antécédent par f. Supposons maintenant que les deux conditions sont remplies. Dans ce cas, on a :

$$\begin{cases} t^2 = x \\ t^4 = y. \end{cases} \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{x}.$$

On trouve donc finalement :

$$f^{-1}(\{(x, y)\}) = \begin{cases} \{-\sqrt{x}, \sqrt{x}\} \text{ si } x > 0 \text{ et } y = x^2 \\ \{0\} \text{ si } x = y = 0 \\ \varnothing \text{ si } x < 0 \text{ ou } y \neq x^2. \end{cases}$$

Le couple (x, y) possède donc 2 antécédents par f si $x > 0$ et $y = x^2$, 1 seul si $x = y = 0$ et 0 si $x < 0$ ou $y \neq x^2$.

c. L'ensemble $f(\mathbb{R})$ est formé des couples (x, y) qui possèdent (au moins) un antécédent par f. D'après le raisonnement effectué au b. on voit donc que :

$$f(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0 \text{ et } y = x^2\}.$$

d. Il s'agit de collecter ensemble les antécédents des couples du type $(x, 5x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Or, d'après le résultat trouvé en b., on voit qu'un tel couple possède (au moins) un antécédent uniquement si $x \geqslant 0$ et $5x = x^2$, c'est-à-dire uniquement si $x = 0$ ou $x = 5$. On trouve alors :

$$f^{-1}(\{(x, 5x),\ x \in \mathbb{R}\}) = f^{-1}(\{(0, 0), (5, 25)\}) = \{-\sqrt{5}, 0, \sqrt{5}\}.$$

Exercice 4. On note A le sous-ensemble $[-4, 0]$ de $\mathbb{R}$. On considère aussi l'application :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to x^2 + 6x + 7.$$

a. Identifier l'image directe de $\mathbb{R}$ par f.

b. Etant donné $y \in \mathbb{R}$, déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$. Combien y possède-t-il d'antécédents par f dans A ?

c. Expliciter les sous-ensembles $f(A)$ et $f^{-1}(f(A)))$ de $\mathbb{R}$.

Solution:

a. Donnons deux méthodes pour déterminer le sous-ensemble $f(\mathbb{R})$. Dans la première, utilisons nos connaissances sur la fonction f, qui est une fonction trinôme du second degré. Comme le coefficient de x^2 est positif (il vaut ici 1), on sait que f va prendre toutes les valeurs supérieures ou égales à son minimum, qui est atteint pour $x = -\frac{6}{2\cdot 1} = -3$. Comme la valeur de ce minimum est $f(-3) = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 7 = -2$, on trouve donc que :

$$f(\mathbb{R}) = [-2, +\infty[.$$

Dans la deuxième méthode, on exprime le fait que $f(\mathbb{R})$ est formé des réels $y \in \mathbb{R}$ possédant au moins un antécédent par f, c'est-à-dire pour lesquels l'équation du second degré (en x) :

$$f(x) = x^2 + 6x + 7 = y \Leftrightarrow x^2 + 6x + 7 - y = 0$$

possède au moins une solution. On sait alors que cette condition est équivalente à ce que :

$$\Delta = 6^2 - 4(7 - y) = 4y + 8 \geqslant 0 \Leftrightarrow y \geqslant -2.$$

On retrouve donc le fait que $f(\mathbb{R})$ est formé de tous les réels supérieurs ou égaux à -2.

b. L'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ n'est autre que l'ensemble des solutions de l'équation du second degré vue en a. On trouve alors :

$$f^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} \{-3 - \sqrt{y+2}, -3 + \sqrt{y+2}\} \text{ si } y > -2 \\ \{-3\} \text{ si } y = -2 \\ \varnothing \text{ si } y < -2. \end{cases}$$

Discutons à présent du nombre d'éléments de $f^{-1}(\{y\})$ qui appartiennent à A, c'est-à-dire qui sont compris (au sens large) entre -4 et 0. Pour $y < -2$, ce nombre vaut 0, car l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est vide. Pour $y = -2$, on voit que l'unique élément de $f^{-1}(\{y\})$, à savoir -3, appartient à A, si bien que le nombre recherché vaut 1. Pour $y > -2$, observons que, d'une part :

$$-3 - \sqrt{y+2} \in A \Leftrightarrow -4 \leqslant -3 - \sqrt{y+2} \leqslant 0 \Leftrightarrow -3 \leqslant \sqrt{y+2} \leqslant 1 \Leftrightarrow y \leqslant -1$$

et, d'autre part :

$$-3 + \sqrt{y+2} \in A \Leftrightarrow -4 \leqslant -3 + \sqrt{y+2} \leqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant \sqrt{y+2} \leqslant 3 \Leftrightarrow y \leqslant 7$$

On voit donc que si $-2 < y \leqslant -1$ alors les deux antécédents de y par f appartiennent à A. Si $-1 < y \leqslant 7$, on trouve qu'un seul antécédent de y appartient à A (il s'agit de $-3 + \sqrt{y+2}$, l'autre antécédent, $-3 - \sqrt{y+2}$, étant "sorti" de A). Enfin, pour $y > 7$, aucun des deux antécédents de y par f n'appartient à A. En résumé :

$$\text{Card}(f^{-1}(\{y\}) \cap A) = \begin{cases} 0 \text{ si } y \in]-\infty, -2[\cup]7, +\infty[\\ 1 \text{ si } y \in \{-2\}\cup]-1, 7] \\ 2 \text{ si } y \in]-2, -1]. \end{cases}$$

c. On sait que $f(A)$ est formé des éléments y de $\mathbb{R}$ qui possèdent (au moins) un antécédent dans A. D'après le raisonnement effectué au b. on voit donc que :

$$f(A) = [-2, 7].$$

Une autre manière de s'y prendre pour déterminer $f(A)$ consiste à suivre l'évolution de $f(x)$ lorque x parcourt l'intervalle $A = [-4, 0]$. Au "début", c'est-à-dire pour $x = -4$, on trouve $f(x) = f(-4) = -1$. Ensuite, lorsque x varie de -4 à -3, la fonction f décroit jusqu'à atteindre la valeur $f(-3) = -2$ (son minimum). Elle va ensuite croitre pour x allant de -3 à 0, passant de la valeur $f(-3) = -2$ à $f(0) = 7$. Lorsque l'on fait le bilan des valeurs obtenues pour $f(x)$, on retrouve alors que :

$$f(A) = [-2, 7].$$

Pour expliciter $f^{-1}(f(A))$, donnons à nouveau deux méthodes. Dans la première, donnons-nous $x \in \mathbb{R}$ et écrivons :

$$x \in f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow f(x) \in f(A) \Leftrightarrow x^2 + 6x + 7 \in [-2, 7] \Leftrightarrow -2 \leqslant (x+3)^2 - 2 \leqslant 7 \Leftrightarrow \cdots$$

$$\cdots \Leftrightarrow 0 \leqslant (x+3)^2 \leqslant 9 \Leftrightarrow -3 \leqslant x + 3 \leqslant 3 \Leftrightarrow -6 \leqslant x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-6, 0].$$

On obtient donc :

$$f^{-1}(f(A)) = [-6, 0].$$

Pour la deuxième méthode, rappelons nous que l'ensemble $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}([-2, 7])$ est obtenu en collectant tous les antécédents de y par f, pour y parcourant $[-2, 7]$. Autrement dit, en effectuant la réunion de tous les ensembles :

$$f^{-1}(\{y\}) = \{-3 - \sqrt{y+2}, -3 + \sqrt{y+2}\} \text{ pour } y \in [-2, 7].$$

Or, pour y allant de -2 à 7, le réel $-3 - \sqrt{y+2}$ décroit de -3 à -6 et le réel $-3 + \sqrt{y+2}$ croit de -3 à 0. En mettant toutes ces valeurs ensemble, on retrouve bien que $f^{-1}([-2, 7]) = [-6, 0]$.

Exercice 5. On donne une application $f : E \to F$ entre deux ensembles. Soit B un sous-ensemble de F.

a. Montrer que l'inclusion $f(f^{-1}(B)) \subset B$ est toujours vérifiée.

b. Sur un exemple de votre choix, montrer que l'inclusion du a. peut être stricte.

c. Montrer qu'on a en fait $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.

Solution:

a. Soit y un élément de $f(f^{-1}(B))$. Par définition, il s'écrit $y = f(x)$ pour un certain $x \in f^{-1}(B)$. On voit donc que x est un antécédent par f d'un élément de B, ce qui permet de dire que $f(x)$ appartient à B. Comme $y = f(x)$, on a donc bien établi que y appartient à B. Autrement dit, tout élément de $f(f^{-1}(B))$ est aussi élément de B, ce qui montre l'inclusion recherchée.

b. Prenons par exemple pour f l'application constante nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to 0.$$

Posons aussi $B = \mathbb{R}$. On obtient alors :

$$\underbrace{f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}}_{\text{tout } x\in\mathbb{R} \text{ vérifie } f(x)\in\mathbb{R}} \qquad \text{et donc } f(f^{-1}(\mathbb{R})) = f(\mathbb{R}) = \{0\}.$$

Dans ce cas, on voit donc que l'inclusion $f(f^{-1}(\mathbb{R})) \subset \mathbb{R}$ dont il est question en a. est stricte.

c. Raisonnons par double inclusion. Pour établir l'inclusion " $\subset$ ", donnons-nous un élément y de $f(f^{-1}(B))$. On a déjà vu au a. que y appartient à B. Par ailleurs, y possède au moins un antécédent par f, et appartient donc à $f(E)$. En définitive, y est élément de $B \cap f(E)$. Pour établir l'inclusion " $\supset$ ", donnons-nous un élément y de $B \cap f(E)$. Comme y est dans $f(E)$, il possède au moins un antécédent x par f. De plus, y appartient à B, si bien que x est un antécédent d'un élément de B, et appartient donc à $f^{-1}(B)$. Ainsi, y est l'image par f d'un élément de $f^{-1}(B)$, et appartient donc à $f(f^{-1}(B))$. Ceci achève de prouver l'égalité voulue.

Exercice 6. On donne une application $f : E \to F$ entre deux ensembles. Démontrer que :

$$\forall A \subset E, \forall B \subset F, \quad f(A) \cap B = \varnothing \ \Leftrightarrow\ A \cap f^{-1}(B) = \varnothing.$$

Indication : procéder par double implication et utiliser des raisonnements par contraposée.

Solution: Pour démontrer cette équivalence, on raisonne par double implication. Commençons par l'implication " $\Rightarrow$ ". On peut par exemple procéder par contraposée, en montrant :

$$\forall A \subset E, \forall B \subset F,\ A \cap f^{-1}(B) \neq \varnothing \Rightarrow f(A) \cap B \neq \varnothing.$$

Sous l'hypothèse que $A \cap f^{-1}(B) \neq \varnothing$, on peut trouver un élément x de A tel que $f(x)$ appartient à B. On voit alors que $y = f(x)$ est un élément de $f(A)$ qui est aussi dans B. Par conséquent $f(A) \cap B \neq \varnothing$ (puisque y appartient à cette intersection). Montrons à présent l'implication " $\Leftarrow$ ", également par contraposée. On veut donc montrer :

$$\forall A \subset E, \forall B \subset F,\ f(A) \cap B \neq \varnothing \Rightarrow A \cap f^{-1}(B) \neq \varnothing.$$

Sous l'hypothèse que $f(A) \cap B \neq \varnothing$, on peut trouver un élément y de B qui appartient aussi à $f(A)$, et qui peut donc s'écrire sous la forme $y = f(x)$, pour un certain x dans A. On voit alors que x est un élément de A qui est aussi dans $f^{-1}(B)$. Par conséquent $A \cap f^{-1}(B) \neq \varnothing$ (puisque x appartient à cette intersection). Ceci achève la preuve de l'équivalence proposée, par double implication.